

## 用磁场元的叠加法求解涡旋电场

汪 镁

(基础科学系)

**摘 要** 本文用磁场元的叠加法计算二维变化的磁场所产生的涡旋电场, 解决了在普通物理学范畴内通常无法解决的问题, 并用此法求解了两个算例。

**关键词** 磁场元, 变化的磁场, 涡旋电场

麦克斯韦提出: 磁场随时间变化时, 在空间任一点都会激发感应电场, 感应电场沿任何闭合路径的环流都满足法拉第电磁感应定律:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

用 $\vec{B}$ 表示磁场的磁感强度, 则上式可用更明显的形式来表示电场和磁场的关系为:

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

其中,  $s$  为静止回路 $L$ 所限定的面积。由于感应电场的环流不等于零, 所以又叫涡旋电场。求解涡旋电场的方法通常是解麦克斯韦微分方程。

本文准备用另一种方法, 即磁场元的叠加法, 对二维空间变化的磁场所激发的涡旋电场进行分析和求解。

在二维问题中, 只有平行于 $xy$ 平面的磁场。

### 1 求解的方法

设磁场的磁感强度 $B$ 只是 $x, y, t$ 的函数(与 $z$ 无关), 磁场在 $xy$ 平面上的截面为 $s$ , 方向垂直纸面向外, 如图1所示。 $\vec{B} = B(x, y, t) \vec{k}$ , 该磁场在空间任一点 $P(x', y')$ 所激发的涡旋电场 $\vec{E}(x', y')$ 的求法如下:

可把磁场截面  $s$  分成许多小面积元，简称磁场元。某一小面积为  $ds$  (在  $s$  内) 的磁场元  $Q$  所激发的涡旋电场  $d\vec{E}(x', y')$ ，可根据麦克斯韦方程求得，其大小满足下式：

$$2\pi r \cdot dE = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$$

$$\therefore dE = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$$

其中  $r$  是  $PQ$  的长度， $d\vec{E}$  的方向如图 1 所示。

由电场叠加原理，整个磁场在  $p$  点激发的涡旋电场  $\vec{E}(x', y')$  就是每个磁场元在  $p$  点激发的涡旋电场的叠加。考虑到方向，其表达式可写成：

$$\vec{E}(x', y') = \int_s d\vec{E} = \frac{1}{2\pi} \int_s -\left(\frac{\vec{r}}{r^2} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) ds \quad (1)$$

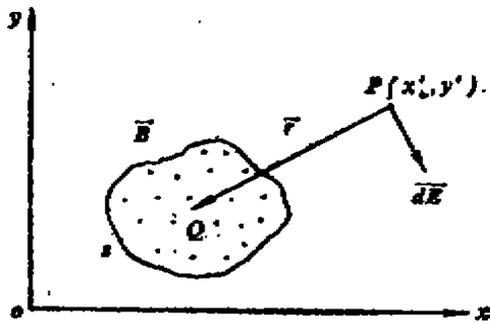


图 1

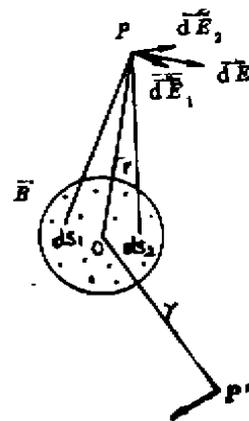


图 2

由上式结果，即可解释圆柱对称变化磁场所激发的涡旋电场的电力线 ( $\vec{E}$  线)，是圆心在该圆柱轴线其截面与轴线垂直的同心圆。因为与轴线相距为  $r$  的任一点  $p$  的涡旋电场，可认为是以  $op$  为对称轴的一对磁场元 (如  $ds_1, ds_2$ ) 在  $p$  点激发的电场的叠加，如图 2 所示。

根据磁场分布的柱对称性，对于与轴线相距为  $r$  的另一点  $p'$  叠加的结果，电场的大小也是一样的，方向都在切线方向上，如图 2 所示。

所以这种变化磁场激发的涡旋电场一定是以  $O$  为圆心的一些同心圆。

由 (1) 式得到的涡旋电场，是满足麦克斯韦方程，即

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 && (\vec{E} \text{ 的散度}) \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (\vec{E} \text{ 的旋度}) \end{aligned}$$

## 2 应用举例

### 1) 求均匀圆柱形变化磁场激发的涡旋电场

设磁场是均匀的，圆柱截面的半径为  $R$ ，距轴线为  $l$  的任一点  $p$  的涡旋电场可用磁场元产

生的涡旋电场叠加的方法来计算。

以 $op$ 为对称轴, 任选一对称的磁场元 $a, b$ , 它们到 $p$ 点的距离均为 $r$ , 根据对称性,  $a, b$ 在 $p$ 点产生的电场只有与 $op$ 垂直的分量 $dE_{\perp}$ , 而与 $op$ 平行的分量则互相抵消, 即

$$dE_{\parallel} = 0$$

所以 $a, b$ 在 $p$ 点产生的电场大小为:

$$\begin{aligned} dE &= 2dE_a \cos\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot r d\varphi dr \cos\varphi \\ &= \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \frac{\cos\varphi}{\pi} d\varphi dr \end{aligned}$$

其中 $dE_a$ 是磁场元 $a$ 在 $p$ 点产生的电场,  $\varphi$ 为 $ap$ 与 $op$ 的夹角, 如图3.

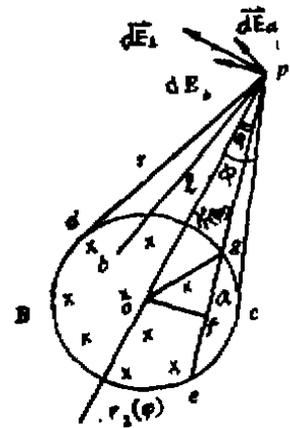


图3

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \int_0^{\pi} \cos\varphi d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \int_0^{\pi} [r_2(\varphi) - r_1(\varphi)] \cos\varphi d\varphi \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\phi$ 是 $op$ 与切线 $pc$ 的夹角;  $r_2(\varphi), r_1(\varphi)$ 是磁场截面圆周被切点 $c, d$ 分成两部分的方程, 从 $\triangle ogp$ 和 $\triangle oep$ 中很容易求出:

$$r_1(\varphi) = pg = pf - gf = l \cos\varphi - [R^2 - l^2 \sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} r_2(\varphi) &= pe = pf + fe = pf + gf \\ &= l \cos\varphi + (R^2 - l^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4)$$

将(4)(3)代入(2)式得:

$$E = \frac{2}{\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \int_0^{\pi} [R^2 - l^2 \sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}} \cos\varphi d\varphi$$

设 $\xi = \sin\varphi$ , 则 $d\xi = \cos\varphi d\varphi$ , 代入上式, 则:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \int_0^{\sin\varphi} (R^2 - l^2 \xi^2)^{\frac{1}{2}} d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \left[ \frac{\xi}{2} (R^2 - l^2 \xi^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{R^2}{2l} \arcsin \xi \frac{l}{R} \right]_{\xi=0}^{\xi=\sin\varphi} \end{aligned}$$

由 $\triangle opa$ 可得  $\sin\phi = \frac{R}{l}$ , 代入上式后, 则:

$$E = \frac{2}{\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2l} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^2}{2\pi l} \frac{\partial B}{\partial t}$$

上式与麦克斯韦方程得到的结果相同。

## 2) 求方柱形变化磁场激发的涡旋电场

设长方形柱体内分布有随时间变化的均匀磁场, 求它所激发的涡旋电场。

设磁场截面的长为 $2a$ , 宽为 $2b$ 的长方形, 则空间任一点 $p(x', y')$ 的涡旋电场可用下列方法求解。

在磁场截面内取一磁场元 $Q$ , 面积 $ds = dx dy$ ,  $pQ = r$ ,  $Q$ 在 $p$ 点激发的电场大小为:

$dE = \frac{ds}{2\pi r} \frac{\partial B}{\partial t}$  . 方向如图4所示。因为：

$$\vec{B} = B(t)\vec{K}$$

$$\vec{r} = (x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j}$$

代入(1)式后得：

$$\vec{E}(x', y') = -\frac{1}{2\pi} \int_s \left( \frac{\vec{r}}{r^2} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_s \left[ \left( \frac{x-x'}{r^2} \vec{i} + \frac{y-y'}{r^2} \vec{j} \right) \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial B}{\partial t} \vec{K} \right] ds = \frac{1}{2\pi} \int_s \left( \frac{x-x'}{r^2} \frac{\partial B}{\partial t} \vec{j} - \frac{y-y'}{r^2} \frac{\partial B}{\partial t} \vec{i} \right) ds \quad (5)$$

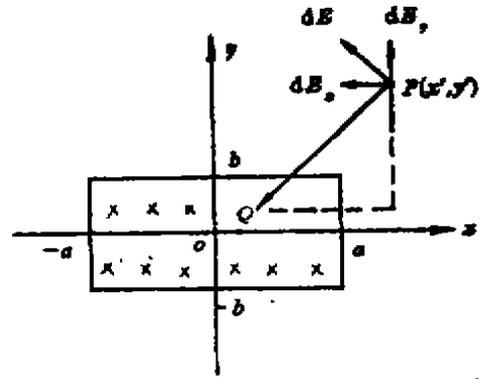


图 4

所以

$$E_x = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \int_s \frac{y-y'}{r^2} ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \int_s \frac{(y-y') dx dy}{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

= ... (计算略)

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \left[ (a-x') \ln \frac{(b-y')^2 + (a-x')^2}{(b+y')^2 + (a-x')^2} \right.$$

$$+ 2(b-y') \operatorname{tg}^{-1} \frac{a-x'}{b-y'} - 2(b+y') \operatorname{tg}^{-1} \frac{a-x'}{b+y'} \left.$$

$$+ (a+x') \ln \frac{(b-y')^2 + (a+x')^2}{(b+y')^2 + (a+x')^2}$$

$$+ 2(b-y') \operatorname{tg}^{-1} \frac{a+x'}{b-y'} - 2(b+y') \operatorname{tg}^{-1} \frac{a+x'}{b+y'} \left. \right] \quad (6)$$

同理可得：

$$E_y = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \left[ (b-y') \ln \frac{(a-x')^2 + (b-y')^2}{(a+x')^2 + (b-y')^2} \right.$$

$$+ 2(a-x') \operatorname{tg}^{-1} \frac{b-y'}{a-x'} - 2(a+x') \operatorname{tg}^{-1} \frac{b-y'}{a+x'} \left.$$

$$+ (b+y') \ln \frac{(a-x')^2 + (b+y')^2}{(a+x')^2 + (b+y')^2}$$

$$+ 2(a-x') \operatorname{tg}^{-1} \frac{b+y'}{a-x'} - 2(a+x') \operatorname{tg}^{-1} \frac{b+y'}{a+x'} \left. \right] \quad (7)$$

从(6)(7)式中可看出此种涡旋电场有下列特点：

1) 当  $x' = 0$ ,  $y' = 0$  时,  $E_x = 0$ ,  $E_y = 0$ ,  $\therefore E = 0$

当  $x' = \infty$ ,  $y' = \infty$  时,  $E_x = 0$ ,  $E_y = 0$ ,  $\therefore E = 0$

即坐标原点  $O$  处没有涡旋电场, 无限远处的涡旋电场也为零。

2) 此涡旋电场有下列对称关系:

$$\begin{aligned} E_x(x', y') &= E_x(-x', y') & E_y(x', y') &= -E_y(-x', y') \\ E_x(x', y') &= -E_x(x', -y') & E_y(x', y') &= E_y(x', -y') \\ E_x(x', y') &= -E_x(-x', -y') & E_y(x', y') &= -E_y(-x', -y') \end{aligned}$$

即此涡旋电场以坐标原点  $O$  为对称点。

3) 当  $x = 0$  时, 由(6)式得:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \left[ 2a \ln \frac{(b-y')^2 + a^2}{(b+y')^2 + a^2} \right. \\ &\quad \left. + 4(b-y') \operatorname{tg}^{-1} \frac{a}{b-y'} \right. \\ &\quad \left. - 4(b+y') \operatorname{tg}^{-1} \frac{a}{b+y'} \right] \end{aligned}$$

由(7)式得:  $E_y = 0$ ,  $\therefore E = E_x$

同样, 当  $y' = 0$  时,  $E_x = 0$

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial t} \left[ 2b \ln \frac{(a-x')^2 + b^2}{(a+x')^2 + b^2} \right. \\ &\quad \left. + 4(a-x') \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a-x'} - 4(a+x') \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a+x'} \right] \end{aligned}$$

$\therefore E = E_y$

即  $x$ ,  $y$  轴上各点的涡旋电场是与  $x$ ,  $y$  轴垂直的。此问题在普通物理范围内通常是无法解决的。

从上述讨论看出, 二维变化的磁场激发的涡旋电场, 实际上是磁场里无数磁场元激发的涡旋电场的叠加。只要知道磁场的分布, 就可以根据(1)式对其激发的涡旋电场进行求解。

### 参 考 文 献

- 1 张三慧主编。电磁学。北京科学技术出版社, 1987
- 2 北大电动力学教学小组编。电动力学。人民教育出版社, 1961
- 3 W.R. 斯迈思。静电学和电动力学。科学出版社, 1982
- 4 James, Marsh, Magnetic and Electric Fields of Rotating Charge Distributions, American Journal of Physics, 1982

(编辑: 姚国安)

COMPUTING THE VORTEX ELECTRIC FIELD BY  
THE SUPERIMPOSITION METHOD OF THE  
ELEMENT OF MAGNETIC FIELD

*Wang Mei*

(Department of Natural Science)

**ABSTRACT** In this paper, the vortex electric field is computed. It is caused by magnetic field subject to two dimensional change. This problem can't be solved in general physics. Two examples are listed.

**KEY WORDS** element of magnetic field, changing magnetic field, vortex electric field