

研究简报

单特征值系统的特殊标准形

汪 纪 锋

(机电系)

摘 要 本文提出了描述单特征值系统的一种特殊形式——“单值——约当(Jordan)标准形”，针对这一标准形系统，给出了能控性和能观测性判据；状态转移阵 $\Phi(t)$ 各元的递推计算式，以及该标准形与对角线标准形间相互转换的非奇异变换矩阵 P 的表达式等。

关键词 单特征值，状态转移阵，物理仿真

1 概 述

设 n 维多变量线性时不变系统 $\Sigma(A, B)$ 由下式描述

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{cases} \quad t \in [0, \infty) \quad (1)$$

其中

A ——系统矩阵 (System Matrix), $n \times n$ 规模

B ——输入矩阵 (Input Matrix), $n \times r$ 规模

C ——输出矩阵 (Output Matrix), $m \times n$ 规模

D ——耦合矩阵 (Coupling Matrix), $m \times r$ 规模

通常 $D=0$ 。

当由特征方程

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

解得系统特征值 (Eigenvalue) $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为互不相等时，则称该系统 $\Sigma(A, B)$ 为单特征值系统 (Single Eigenvalue System)。

单特征值系统最常运用的理论形式是对角线标准形 (Diagonal Normative Form) [1]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{cases} \quad (2)$$

也即系统矩阵

$$A = \text{diag}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其对角线各元正是系统不相等的 n 个特征值。

然而，本文在这里提出描述单特征值系统的下述特殊形式，即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{cases} \quad (3)$$

亦即系统矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_i \neq \lambda_j, (i \neq j) \\ i, j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

为区别于具有重特征值系统 (Multiple Eigenvalue System) 的约当 (Jordan) 标准形，我们定义 (3) 式为“单值——约当标准形 (Single Eigenvalue——Jordan Normative Form)”。

“单值——约当标准形”是具有一定的工程实用意义的。工程实际中有相当一类“由若干小惯性环节相串联”的大惯性系统，比如：长距离带式运输机械；远距离电力输电线系统等等，在分布参数的影响下，它们都可视为“若干小惯性环节相串联”的大惯性系统。其频域数学模型 (以标量系统为例) 可表示为：

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k_1}{s - \lambda_1} \cdot \frac{k_2}{s - \lambda_2} \cdot \dots \cdot \frac{k_n}{s - \lambda_n} = \prod_{j=1}^n \frac{k_j}{s - \lambda_j}$$

或

$$= \frac{K}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (4)$$

其中， k_j 和 λ_j 都是由各传输段分布参数确定的常数，一般 $\lambda_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 都是不相等的，即此类大惯性系统总是单特征值系统。

当按一般常用方法^{[1][2]}可立即建立(4)式所描述系统的状态空间模型为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & & & -a_1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K \end{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = [0 \dots \dots 0 \ 1] \mathbf{x} \quad D = 0 \end{cases} \quad (5)$$

为了能够简便、直观地去分析这类大惯性系统的性能特点，通常是先在理论上对 (5) 式进行非奇异线性变换 (Non-Singular Linear Transform) 而得到形如 (2) 式的对角线标准形，然后再利用对角线标准形去分析研究系统。

但是，当我们以下述方框图（图 1）表示这类“若干小惯性环节相串联”的大惯性系统时，有：

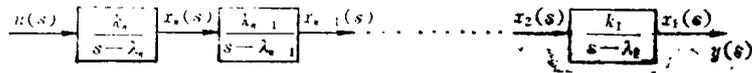


图 1 “若干小惯性环节相串联”系统框图

显然，由框图可以绘出它的状态变量图（图 2）

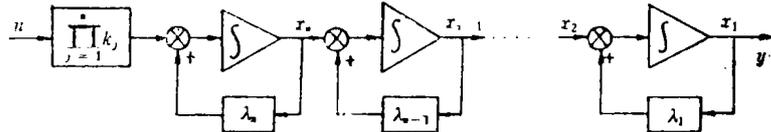


图 2 “若干小惯性环节相串联”系统状态变量图

于是，由图 2 所示的状态变量图便可以立即写出此类“若干小惯性环节相串联”的大惯性系统的状态空间描述来，即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 1 \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \prod_{j=1}^n k_j \end{bmatrix} [u] \\ y = [y] = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{x} \quad D=0 \end{cases} \quad (6)$$

这正是本文（3）式所定义的“单值——约当标准形”。

由此可见，“单值——约当标准形”是具有一定工程实用意义的理论模型，它是单特征值系统的又一种重要标准形式。

2. 单值——约当标准形系统的特性

利用单值——约当标准形研究系统是方便可行的。下面给出它的一些性质。

性质 1 单值——约当标准形系统，其系统矩阵 A 对角线上各元就是该系统的 n 个不相等的特征值。

这一性质可以直接按系统特征值定义求得，令

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} (s-\lambda_1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & (s-\lambda_2) & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & (s-\lambda_{n-1}) & -1 \\ & & & & (s-\lambda_n) \end{vmatrix} = 0$$

有
$$\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = 0$$

即特征值 $s_i = \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。

性质 2 单值——约当标准形系统的物理仿真——状态变量图 (State Variable Diagram)。

系统的物理仿真, 说明了该系统的物理可实现性 (真实性)。

为直观简单, 图 3 给出了一个 n 维标量系统 (Scalar System) —— 单输入/单输出系统的物理仿真——状态变量图。

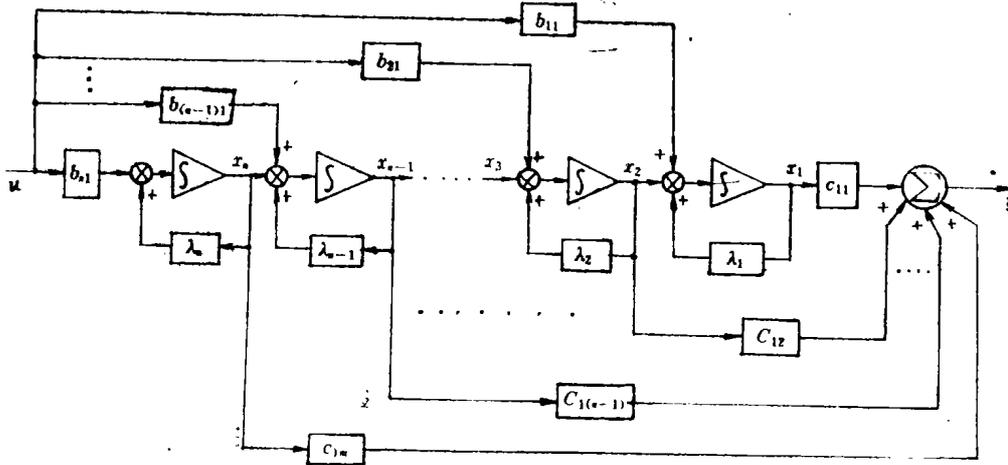


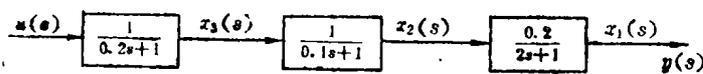
图 3 单值——约当标准形系统的状态变量图

从图 3, 立即可以写出该系统的状态空间描述为

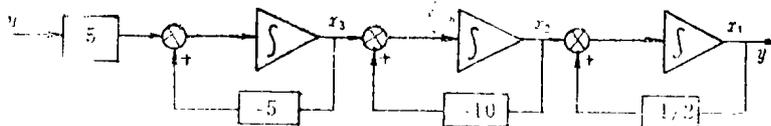
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_2 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n-1,1} \\ b_{n1} \end{bmatrix} [u] \quad (7)$$

$$y = [y] = [C_{11} \ C_{12} \ \dots \ C_{1(n-1)} \ C_{1n}] x \quad D = 0$$

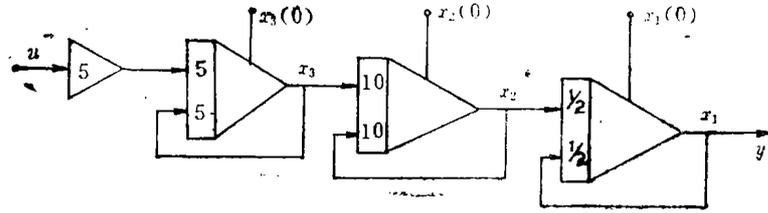
图 4 给出了一个可设置初始状态的实际的三维标准系统的物理仿真实例。图(a)、图(b)、图(c)分别为该系统的方框结构图、状态变量图和仿真结构图^[3]。



(a) 方框结构图



(b) 状态变量图



(c) 物理仿真图

图 4 一个三维标量系统物理仿真实例

于是，我们立即可以得到这个三维标量系统的状态空间描述为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} [u] \\ \mathbf{y} = [y] = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

性质 3 单值——约当标准形系统，其状态转移阵 (State Transition Matrix) 为下述右上三角阵形式

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \dots & \phi_{1n} \\ & \phi_{22} & \phi_{23} & \dots & \phi_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \phi_{ii} & \dots \\ & & & & \phi_{(n-1)n} \\ & & & & \phi_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (8)$$

(i, j = 1, 2, 3, \dots, n)

其中各元 ϕ_{ij} ，经过推证 (过程本文从略)，其计算程序可以依列序 $j(j=1, 2, \dots, n)$ 由下往上逐行递推进行，即

$$\begin{aligned} j=1 & \quad \phi_{11} = e^{\lambda_1 t} \\ j=2 & \quad \phi_{22} = e^{\lambda_2 t} \\ & \quad \phi_{12} = \frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\phi_{23}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ j=3 & \quad \phi_{33} = e^{\lambda_3 t} \\ & \quad \phi_{23} = \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_3} - \frac{\phi_{33}}{\lambda_2 - \lambda_3} \\ & \quad \phi_{13} = \frac{e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\phi_{23}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\phi_{33}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \\ j=4 & \quad \phi_{44} = e^{\lambda_4 t} \\ & \quad \phi_{34} = \frac{e^{\lambda_3 t}}{\lambda_3 - \lambda_4} - \frac{\phi_{44}}{\lambda_3 - \lambda_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{24} &= \frac{e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} - \frac{\phi_{34}}{\lambda_2 - \lambda_3} - \frac{\phi_{44}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} \\ \phi_{14} &= \frac{e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} - \frac{\phi_{24}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\phi_{34}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \\ &\quad - \frac{\phi_{44}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} \\ &\dots\dots\end{aligned}$$

根据 $\Phi(t)$ 的结构形式及上面对 ϕ_{ij} 的推算结果, 我们可以归结出递推计算状态转移阵中各元 ϕ_{ij} 的通式为:

当 $i=j$ 时, 则

$$\phi_{ij} = \phi_{ji} = e^{\lambda_i t} \quad (9)$$

当 $i=(j-1), (j-2), \dots, 2, 1 < j$ 时, 则

$$\phi_{ij} = \frac{e^{\lambda_i t}}{\prod_{K=i+1}^j (\lambda_i - \lambda_K)} - \sum_{K=i+1}^j \frac{\phi_{Kj}}{\prod_{K=i+1}^K (\lambda_i - \lambda_K)} \quad (10)$$

而当 $i > j$ 时, 则有

$$\phi_{ij} \equiv 0 \quad (11)$$

当然, (6) 式~(8) 式中 $j=1, 2, 3, \dots, n$.

可以看出, 利用递进方法计算状态转移阵 $\Phi(t)$ 各元的通式 (6), (7), (8) 三式, 在运用计算机进行解算时是十分方便可行的。

性质 4 单值——约当标准形系统的能控性与能观测性可以根据输入矩阵 B 和输出矩阵 C 的结构直接作出判断。

为表述清楚, 记“单值——约当标准形” (3) 式中 B 和 C 阵为

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}_{n \times r} \quad C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n-1} \ c_n]_{m \times n}$$

显然,

$b_i = [b_{i1} \ b_{i2} \ \dots \ b_{ir}]$ —— r 列行向量 ($i=1, 2, \dots, n$)

$$C_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} \text{ —— } m \text{ 行列向量 } \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

于是, 有如下能控能观性判据。

能控性判据: 对于单值——约当标准形系统

(1) 当且仅当输入矩阵 B 中最后一行不全为零, 即 b_n 为非零行向量, 那么系统是状态完全能控的;

(2) 如果 B 阵最后一行全为零，即 b_n 为零向量，则系统是状态不完全能控的，且相应于该行的状态分量 x_n 不能控；

(3) 进一步，当 b_n 为零向量， b_{n-1} 也为零向量，则状态分量 x_n 和 x_{n-1} 不能控。余类推。

这一判据可以由图 3 的状态变量图加以说明。在图 3 所示的标量系统中，只要 B 阵最后一行不全为零，即 $b_n = b_{n1} \neq 0$ ，那么所有状态分量 $x_1, x_2 \dots x_n$ ，对于控制函数 $u = u$ 来说都是受控的。

这一判据还可以推论为：对于单值——约当标准形系统，只要状态分量 x_n 能控，则其余分量 $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ 也是能控的，即状态是完全能控的。

能观性判据：对于单值——约当标准形系统

(1) 当且仅当输出矩阵 C 中第一列不全为零，即 c_1 为非零列向量，那么系统是状态完全能观测的；

(2) 如果 C 阵第一列全为零，即 c_1 为零向量，则系统是状态不完全能观测的，且相应于该列的状态分量 x_1 不能观测；

(3) 进一步，当 c_1 为零向量， c_2 也为零向量，则状态分量 x_1 和 x_2 不能观测。余类推。

类似地，这一判据也可以用图 3 单值——约当标准形系统的状态变量图加以说明；图中，只要 C 阵第一列不全为零，即 $c_1 = c_{11} \neq 0$ ，那么所有状态分量 $x_1, x_2 \dots x_n$ ，总是能观测的。

同理，也可推论为：对于单值——约当标准形系统，只要状态分量 x_1 是能观测的，则其余分量 $x_2, x_3 \dots x_n$ 也是能观测的，即系统是状态完全能观测的。

性质 5 单特征值系统，其单值——约当标准形与对角线标准形之间，总可以通过非奇异线性变换 (Non-singular Linear Transform) 而相互转换。非奇异变换矩阵 P 可以应用下面经过推证后得到的上三角阵。其中 λ_i 是系统的不相等的特征值 ($i = 1, 2, \dots, n$)。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} & \dots & \frac{1}{\prod_{i=2}^n (\lambda_1 - \lambda_i)} \\ & 1 & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} & \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} & \dots & \frac{1}{\prod_{i=3}^n (\lambda_2 - \lambda_i)} \\ & & 1 & \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_4} & \dots & \frac{1}{\prod_{i=4}^n (\lambda_3 - \lambda_i)} \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 1 & \frac{1}{\lambda_{n-1} - \lambda_n} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$n \times n$

A NEWFANGLED NORMATIVE FORM FOR SINGLE EIGENVALUE SYSTEMS

Wang Jifeng

(Dept. of Mechanical and Electrical Engineering)

ABSTRACT This paper offers a newfangled normative description defined as single eigenvalue-Jordan normative form (SE-JNF) for single eigenvalue systems. Further, the paper studies the properties of the newfangled description, for example, the eigenvalue operation, the criteria of the controllability and the observability, etc. To state the reality in physics for the SE-JNF, the physical simulation diagram is shown in the paper. The paper also gives out the recursive calculation expression of each element ϕ_{ij} in $\Phi(t)$ which is just the state transition matrix of the SE-JNF. At the same time, the nonsingular transform matrix \mathbf{P} which can make the diagonal description convert into the SE-JNF or on the contrary, the SE-JNF into the diagonal form is also given in the paper.

KEY WORDS single eigenvalue, state transition matrix, physical simulation