

混凝土结构非线性全过程分析中的迭代控制法研究

TU370.1

③
14-20

王志军 刘南科

(重庆建筑大学建筑工程学院 400045)

摘要 在深入研究各类迭代控制法的基础上,针对混凝土结构的非线性全过程分析,在常规的位移和弧长控制法中引入了简单适用的考虑路径搜寻和单因子加速的方法,明显改善了收敛情况。

关键词 混凝土结构,非线性全过程分析,迭代方法,位移控制法,弧长控制法

中图分类号 TU822.2

混凝土是非线性材料,其应力-应变关系具有上升段和下降段,同样混凝土结构的荷载-位移反应曲线($P-\Delta$ 关系)通常也具有上升段和下降段。在用荷载增量法求解结构的非线性问题时,常规的牛顿-拉夫逊(NR)迭代方法在邻近结构最大承载力(极值点)区域得不到收敛的结果,对结构反应的下降段就更是无能为力。近一、二十年来,为了获得结构的全过程反应,人们一直在对结构非线性全过程分析中的迭代控制算法进行研究,提出了多种不同的方法^{[1][2][3]},例如:压缩平衡迭代法、人工弹簧法、位移控制法和不同形式的弧长控制法等,其中位移控制法和弧长控制法最为有效。对于一般结构的非线性全过程分析较为有效的还是位移控制法和弧长控制法。经笔者实际应用表明,对于混凝土结构,由于材料和几何非线性特性都较显著,采用常规位移和弧长控制法的收敛效果并不太理想。为了获得混凝土结构的非线性全过程反应,笔者在深入研究各种迭代控制方法的基础上,对不同的迭代法进行了比较分析,归纳出了不同弧长法的一般迭代格式,寻找了一种把步长搜寻和单因子加速同位移控制法和不同形式的弧长控制法相结合的方法,并将此方法应用到钢筋混凝土和预应力混凝土结构的非线性全过程分析中,取得了一定的效果。

1 位移控制法的迭代格式

人们发现,引起NR方法发散的原因是由于在迭代过程中固定荷载水平所造成的。位移控制法便是一种改荷载增量控制为位移增量控制的方法。用有限元法求解结构的非线性问题,对每次荷载增量,可建立如下的方程式。

收稿日期:1997-11-11

王志军,男,1965年生,讲师,博士后

$$[K]^{(i-1)}\{\delta u\}^{(i)} = [P] \cdot \delta \lambda^i + \{R\}^{(i-1)} \quad (1)$$

式中: $[K]^{(i-1)}$ —第 $i-1$ 次迭代后形成的刚度矩阵; $\{\delta u\}^{(i)}$ —第 i 次迭代产生的位移增量; $\delta \lambda^i$ —第 i 次迭代的荷载增量系数; $[P]$ —参考外荷向量; $\{R\}^{(i-1)}$ —第 $i-1$ 次迭代后尚存不平衡力。式(1)中采用不平衡力 $\{R\}$ 而不采用 Crisfield 等人用的内部抗力形式, 主要是为了考虑多组荷载作用和非比例加载方便。

在式(1)中, 如果让 $\delta \lambda^i = \text{常数}$, 其余的 $\delta \lambda^i = 0$, 便成了常规的固定荷载水平的增量方程。如果 $\delta \lambda^i$ 不固定, 就不能仅仅靠方程(1)求得问题的解, 还需要附加另外的条件才行。位移控制法的迭代过程就是在结构的位移向量 $\{u\}$ 中, 选取某一分量 u_2 作为控制变量, 在每次荷载增量时, 确定 u_2 的增量 Δu_2 , 使其固定为 \hat{u}_2 , 通过式(1)来反求荷载增量 $\delta \lambda^i$ 。

如果联合选定的分量 u_2 和式(1)来求解, 会破坏刚度矩阵的带状性和对称性, 给求解带来很大的困难。为了不增加对总刚度矩阵重新排序的工作量, 可以利用 Batoz 和 Dhatt 提出的双位移分量^[7], 直接用总刚度矩阵来进行计算。

将第 i 次迭代后产生的位移增量分为如下两部分(为简便, 以下公式均省略了矩阵和向量符号):

$$\delta \lambda^i = \delta \lambda^i \cdot \delta u^{(i)'} + \delta u^{(i)''} \quad (2)$$

$$\delta u^{(i)'} = [K^{i-1}]^{-1} P, \quad \delta u^{(i)''} = [K^{i-1}]^{-1} R \quad (3)$$

这样便有:

$$\Delta u^{(i)} = \Delta u^{(i-1)} + \delta u^{(i)} \cdot \eta^i \quad (4)$$

式中 $\Delta u^{(i-1)}$ 和 $\Delta u^{(i)}$ 分别为第 $i-1$ 次和第 i 次迭代后所产生的总位移增量, 如图 1 所示; $\Delta u^{(i-1)}$ 和 $\Delta u^{(i)}$ 分别为第 $i-1$ 次和第 i 次迭代后的总位移。 η^i 为位移修正参数, 主要目的是为了减少迭代次数, 加速收敛过程, 本文后面对此将详细说明。

对于选择的位移控制参数 u_2 有:

$$\delta u_2^i = \delta \lambda^i \cdot \delta u_2^{(i)'} + \delta u_2^{(i)''} \quad (5)$$

假设结构在上级增量下完全收敛, 这时 $\delta u_2^{(i)''} = 0$, 让 u_2 的第一次迭代值就满足 u_2 的控制增量 \hat{u}_2 , 即令 $\delta u_2^i = \hat{u}_2$, 由式(5)可得:

$$\delta \lambda^i = \frac{\hat{u}_2 - \delta u_2^{(i)''}}{\delta u_2^{(i)'}} = \frac{\hat{u}_2}{\delta u_2^{(i)'}} \quad (6)$$

在随后的迭代过程中 ($i > 1$), 应满足 $\delta u_2^i = 0$, 从式(5)可得:

$$\delta \lambda^i = \frac{-\delta u_2^{(i)''}}{\delta u_2^{(i)'}} \quad (7)$$

求得 $\delta \lambda^i$ 后, 便可根据式(2)得到其它位移分量。如此循环, 直到收敛为止。

位移控制法中的位移控制参数, 在计算中不好选取, 需要事先对结构的荷载—位移反应有一个详细的了解, 这就是位移控制法的局限所在。笔者在计算中发现, 对结构局部变化不太显著的区域, 位移控制法能得到较好的效果, 但当结构的非线性变化显著时, 如果控制位移选择不恰当, 位移控制法往往失效。从本文后面的比较中, 也可看出这点。

2 弧长控制法的一般迭代格式

弧长控制法是另外一种非固定荷载水平的迭代控制方法, 它通过引入一个荷载—位移

约束条件来实现荷载的自动增量。由于弧长制法不需要事先对结构的非线性反应特性作过多的了解,就能实现全过程分析的自动控制,而且迭代效率较高,因此国外许多学者都研究过此法并提出了多种不同的形式^{[4][5][6]}。

弧长控制法的荷载-位移约束条件,从几何空间上看,可分为曲面和平面两大类。

曲面控制的弧长法的荷载-位移约束条件可统一为如下的一般形式。

$$\beta(\Delta\lambda^i)^2 \|P\|^2 + \alpha \|\Delta u^i\|^2 = \Delta l^2 \quad (8)$$

式中: $\|P\|$ 和 $\|\Delta u\|$ 分别是参考荷载向量和位移增量向量的二范数; α 、 β 为尺度因子; Δl 便是弧长法的弧长半径(图 1)。

式(8)中左边两项分别表示力的影响和位移的影响。 α 、 β 的不同便决定了弧长法的不同形式。

(1) 当 $\alpha=1$ 、 $\beta=1$ 时,式(8)便成了 Crisfield 提出的等弧长的球面弧长法。此法比较直观,其约束面可以看成以 m 点为球心,以 Δl 为半径的球面(图 1)。由于式中包括了参考荷载向量,尺寸效应较为明显,收敛效果不好。

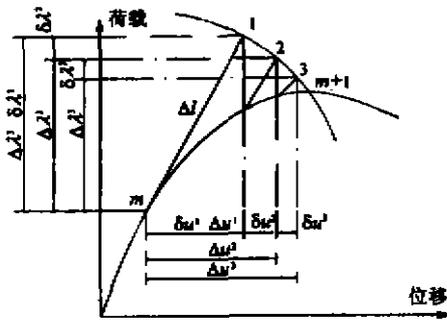


图 1 曲面弧长法示意图

(2) $\alpha=1$ 、 $\beta=0$, 式(8)成为:

$$\Delta u^{(i)T} \cdot \Delta u^{(i)} = \Delta l^2 \quad i=1, 2, \dots \quad (9)$$

这就是 Crisfield 的柱面弧长法^[5]。此法忽略了荷载的影响,可以理解为全方位的位移控制。很多研究者研究了此法,认为收敛效果明显改善。

(3) Ramm^[4]综合了 1、2 两种情况,他让 $\alpha=1$ 、 $\beta=1/\|P\|^2$, 可得:

$$(\Delta\lambda^i)^2 + \Delta u^{(i)T} \cdot \Delta u^{(i)} = \Delta l^2 \quad i=1, 2, \dots \quad (10)$$

(4) 为了消除尺寸效应影响,可让: $\alpha=1/\Delta \bar{u}^T \cdot \Delta \bar{u}$, $\beta=1/\|P\|^2$, $\Delta \bar{u}$ 是第一次增量产生的位移增量,从而得到:

$$(\Delta\lambda^i)^2 + \|\Delta u^i\|^2 / \|\Delta \bar{u}\|^2 = \Delta l^2 \quad i=1, 2, \dots \quad (11)$$

上式表示的是无量纲弧长法。笔者发现,此法的收敛改善情况并不明显。

(5) K. C. Park 等人,曾提出过使用 P. G. Bergan 的当前刚度参数的椭圆面弧长法,也就是让 $\alpha=1$ 、 $\beta=\text{Bergan}$ 的当前刚度参数。此法的收敛改善情况也不明显。

以上所列的都是曲面弧长法的约束条件,Riks 和 Ramm 等人^{[2][4]}还提出过如下形式的平面弧长法。

$$(\delta\lambda^{(1)})^2 + (\delta\lambda^{(1)})^T \cdot \delta u^1 = \Delta l^2 \quad i=1 \quad (12)$$

$$\delta\lambda^{(1)} \cdot \delta u^{(i)} + (\delta\lambda^{(1)})^T \cdot \delta u^1 = 0 \quad i>1 \quad (13)$$

如果每次迭代中都更新控制平面,即把式(13)改为:

$$\delta\lambda^{(i-1)} \cdot \delta u^{(i)} + (\delta\lambda^{(i-1)})^T \cdot \delta u^1 = 0 \quad i>1 \quad (14)$$

这样便成了更新的平面弧长法。有了式(8)~(14)的荷载-位移约束条件,便可根据方程(1)求得非线性问题的解和位移控制法类似,如果约束条件和方程(1)同时求解,也将破坏刚度矩阵的对称性和带状性,使得求解非常困难。因此,同样需要将第 i 次迭代后产生的位移增量分为式(2)所示的两部分。

曲面控制的弧长法的荷载增量系数 $\delta\lambda^i$ 的求法根据具体的荷载 - 位移约束条件有所不同。下面就柱面弧长法式(9)加以说明。

当 $i > 1$ 时, 将式(3)代入式(9), 注意到 $(\Delta u^{(i-1)})^T \cdot \Delta u^{(i-1)} = \Delta l^2$, 并记:

$$\begin{aligned} \delta u^{(i)T} &= \tilde{\delta}_0, & \delta u^{(i)U} &= \tilde{\delta}_i, & \alpha_1 &= \eta' \tilde{\delta}_0^T \cdot \tilde{\delta}_0, & \alpha_2 &= (\Delta u^{(i-1)})^T \cdot \tilde{\delta}_0 + \eta' \tilde{\delta}_0^T \tilde{\delta}_i, \\ \alpha_3 &= \eta' \tilde{\delta}_i^T \tilde{\delta}_i + 2(\Delta u^{(i-1)})^T \tilde{\delta}_i, \end{aligned}$$

便可得到如下的一元二次方程。

$$\alpha_1 \cdot (\delta\lambda^i)^2 + 2\alpha_2 \cdot \delta\lambda^i + \alpha_3 = 0 \quad (15)$$

上式一般会有两个实根, 可选择使 $\Delta u^{(i-1)}$ 和 $\Delta u^{(i)}$ 所成“夹角”最小的那个解作为 $\delta\lambda^i$ 。

当 $i = 1$ 时, 从式(9)可得: $(\Delta u^{(1)})^T \cdot \Delta u^{(1)} = (\delta\lambda^{(1)})^2 \cdot \tilde{\delta}_0^T \cdot \tilde{\delta}_0$, 故:

$$\delta\lambda^{(1)} = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\tilde{\delta}_0^T \cdot \tilde{\delta}_0}} \quad (16)$$

上式中, $\delta\lambda^{(1)}$ 取正代表加载, 取负表示卸载。 $\delta\lambda^{(1)}$ 的正负号可根据刚度矩阵行列式的正负号或当前刚度参数进行判断。

平面弧长法可根据式(12)、(13)、(14)直接求得荷载增量系数, 避免了求解一元二次方程和根的选取, 从这个意义上讲, 平面弧长法比曲面弧长法要简单好用, 但它的收敛速度比曲面弧长法要慢, 在极值点附近也可能得不到收敛的结果。

一旦荷载增量系数 $\delta\lambda^i$ 由荷载 - 位移约束条件求得, 便可利用式(2) ~ (4) 求解位移增量。如果不满足收敛条件, 则再进行迭代(见图1), 直到满足收敛条件为止, 这在图1上可看成是到达了 $m+1$ 点。结构反应从 m 点到 $m+1$ 点便完成了一次增量过程。

3 路径搜寻和单因子加速

采用一般的位移法或弧长法进行计算时, 在靠近极值点的区域, 当结构非线性变化显著时(例如混凝土结构), 也有可能得不到收敛的结果(或收敛很慢), 这时就需要进行迭代路径搜寻。另外, 我们还可以在每一次迭代开始时, 用一个加速因子来减少路径搜寻次数, 达到加速收敛的效果。本文在文献[5]的基础上, 针对位移控制法和弧长控制法, 提出如下简单实用的路径搜寻和单因子加速方法。

3.1 路径搜寻

在通常情况下, 式(4)中的 η' 都被假设等于1, 但为了减少迭代次数, 我们可以选择一合理的 η' (大于或小于1), 对位移增量 $\delta u^{(i)}$ 进行优化, 使得此迭代取得最佳效果, 这就是路径搜寻的思想。

当迭代收敛时, 结构的不平衡力 R' 趋于{0}, 内积 $S' = R' \cdot \delta\lambda^i$ 也将趋于0。因而从理论上讲, 进行迭代路径搜寻的目的就是寻找最优 η' 使得 S' 等于0, 要严格满足这一要求在实际计算中是困难的, 可用下面的近似条件来代替。

$$|S^{(i+1)}| \leq \psi |S^{(i)}| \quad (17)$$

式中: $S^{i,j}$ ——第 i 次迭代, 第 j 次路径搜寻的内积;

$S^{i,0}$ ——第 $i-1$ 次迭代后尚存不平衡力和 δu^i 的内积;

ψ ——优化因子, η^i 最优时 $\psi = 0$, 在普通迭代过程中, 取 $\psi = 0.8$ 就可得到满意的效果。

对于位移控制法和平面弧长法, 从式 (6)、(7)、(12)、(13) 和 (14) 可以看出, 每次迭代的荷载增量系数 $\delta\lambda^i$ 与位移修正系数 η^i 无关, 因此在路径搜寻过程中, 荷载增量系数 $\delta\lambda^i$ 不用改变, 这与固定荷载水平的迭代法类似。第 i 次迭代第 j 次路径搜寻后, 如果内积 $S^{i,j}$ 仍不满足式 (17), 那么第 $j+1$ 次路径搜寻值可直接用式 (18) 进行插值计算。

$$\eta^{i,j+1} = \frac{-S^{i,0}}{S^{i,j} - S^{i,0}} \eta^{i,j} \quad (18)$$

而对于曲面弧长法, 例如柱面弧长法, 从式 (15) 可看出, 荷载增量 $\delta\lambda^i$ 与 η^i 有关, η^i 的改变将导致 $\delta\lambda^i$ 的变化, 从而使得位移增量 δu^i 和内积 $S^i = R^i \delta\lambda^i$ 也跟着改变, 因此在曲面弧长法中使用路径搜寻的关键是如何联合求解 $\delta\lambda^i$ 和 η^i 。另外, 在求解 $\delta\lambda^i$ 和 η^i 的过程中, η^i 的改变也将会使不平衡力 $R^{i,j}$ 随着改变, 如果要严格计算每一步的不平衡力, 其工作量是相当大的。为了减少计算工作量, 经笔者试验, 在路径搜寻过程中可按式 (19) 近似计算不平衡力。

$$R^{i,j} = R^{i,j-1} + \delta\lambda^{i,j} \cdot P - \delta\lambda^{i,j-1} \cdot P \quad (19)$$

对曲面弧长法, 一般采用试算法来进行迭代路径搜寻。不同曲面弧长法的路径搜寻方法基本相同, 以柱面弧长法为例, 笔者建议按下列步骤进行迭代路径搜寻。

(1) 用下面两式求得 $S^{i,0}$ 和 $S^{i,j}$

$$S^{i,0} = (\tilde{\delta}_i + \delta\lambda^{i,j} \cdot \tilde{\delta}_0)^T \cdot (R^{i,0} + \delta\lambda^{i,j} P), \quad \delta\lambda^{i,j} = (\tilde{\delta}_i + \delta\lambda^{i,j} \cdot \tilde{\delta}_0)^T \cdot R^{i,j} \quad (20)$$

(2) 用式 (18) 插值计算 $\eta^{i,j+1}$, 用式 (15) 求得新的 $\delta\lambda^{i,j+1}$

(3) 用新的 $\delta\lambda^{i,j+1}$ 重新计算以上第 (1) 步和第 (2) 步, 直到 η 和 $\delta\lambda$ 没有明显的变化为止。

通过迭代路径搜寻, 用较少的附加计算工作量就可加速迭代的收敛过程, 特别是当结构的非线性反应明显时, 更是如此。

3.2 单因子加速

在式 (4) 中, 为加速迭代收敛过程, 采用位移修正系数来增加或缩小每次迭代产生的位移增量, 这种方法就是单因子加速。在没有使用迭代路径搜寻前, 单因子加速常具有盲目性, 加速因子不好选取, 加速效果往往不明显。

根据路径搜寻的思想, 我们可仿造式 (18) 来构造第 i 次迭代的加速因子。

$$\eta^i = \frac{-S_A}{S_B - S_A} \eta^{i-1} \quad (21)$$

式中 S_A 代表第 $i-2$ 次迭代后尚存不平衡力和 δu^{i-1} 的内积, S_B 代表第 $i-1$ 次迭代后尚存不平衡力和 δu^{i-1} 的内积, η^{i-1} 是第 $i-1$ 次迭代时的加速因子。

经笔者实际应用发现, 把单因子加速和路径搜寻结合起来, 将会减少搜寻次数, 加速收敛过程, 起到事半功倍的作用。两者结合的方法一般都是让路径搜寻的第一次试验值 $\eta^{i,1}$

直接等于 μ ，这样就会使第 i 次迭代在第一次路径搜寻时就得到满意的结果。

4. 收敛效果比较

对于混凝土结构非线性全过程分析，不同迭代方法的收敛效果不同，下面以一算例来具体说明。

图2表示文献[8]中预应力框架YK-B-1的水平力 P 和水平力加载点处水平侧移 Δ 的关系。为了比较，在求解过程中采取了一般NR方法、位移控制法、平面弧长法、柱面弧长法和无量纲弧长法等多种迭代方法，在位移控制法和各种弧长控制法中根据考不考虑路径搜寻和单因子加速又分为两种情况，附表是各种方法的收敛情况。弧长控制法所取水平荷载 P 的参考荷载向量大小为10 kN。

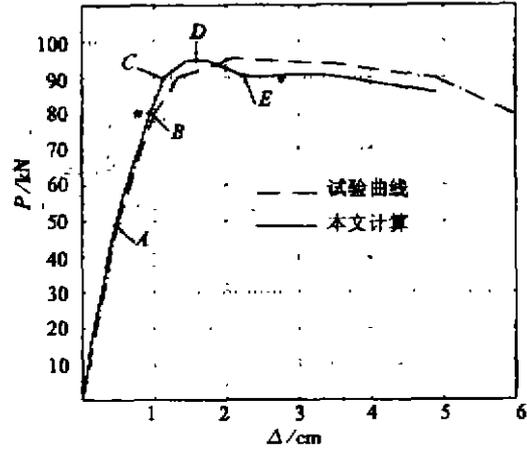


图2 YK-B的 $P-\Delta$ 关系曲线

图2中 $P-\Delta$ 曲线上A点以前，非线性反应不明显，采用固定荷载的常规NR方法经过一两次迭代就可得到收敛结果。结构反应经过A点后，非线性变化已较明显，但在B点前采用常规NR方法仍可收敛，只是收敛速度减慢，而弧长法的收敛速度没有较大改变。经过B点后，常规NR方法的收敛速度越来越慢，已不可能得到C点之后的反应曲线。在C点之前，不同弧长法的收敛效果基本相同。如不采用路径搜寻等迭代加速方法，平面弧长法在极值点附近将不收敛，曲面式的弧长法的收敛速度也很慢。从附表可以看出，在结构反应从C点到E点之间，采用路径搜寻和单因子加速明显减少了迭代次数。就此例而言，柱面弧长法和无量纲弧长法的效果要好于平面弧长法。对于位移控制法，选择水平力加载点处的水平侧移为控制位移，如控制位移增量取为0.05 cm，在C点前收敛情况比较好，但在极值点附近却得不到收敛的结果。只有当位移控制增量减少到0.01 cm后，才得到了收敛的结果，但是这样就造成增量次数较多，使得通过峰值点的时间较长。附表中位移控制法对应数据在C点以后是控制值为0.01 cm的结果。

附表 不同迭代方法收敛情况

单位：次

P-Δ曲线上位置	常规NR方法 (固定荷载水平)	位移控制法		平面弧长法		柱面弧长法		无量纲弧长法	
		不加速	加速	不加速	加速	不加速	加速	不加速	加速
A之前	≤3	≤3	≤2	≤3	≤2	≤3	≤2	≤3	≤2
B附近	≤5	≤4	≤2	≤3	≤2	≤3	≤2	≤3	≤2
C附近	≤15	≤8	≤4	≤8	≤4	≤6	≤3	≤6	≤3
D附近	不收敛	≤16	≤12	不收敛	≤18	≤20	≤11	≤19	≤11
E附近	不收敛	≤14	≤10	≤17	≤12	≤14	≤9	≤14	≤9

笔者还针对不同问题进行过较多的算例计算，结果和以上分析都基本吻合。

5 结 语

(1) 在混凝土结构的非线性全过程分析中, 固定荷载水平的 NR 方法已失效, 需要采用位移控制和弧长控制方法来进行迭代计算。一般来说, 弧长控制法的收敛性能较好。在弧长法中, 曲面形式的弧长法的收敛效果又要好于平面弧长法, 但由于后者比较简单, 和常规 NR 方法相比所增计算工作量也不大, 因此在分析中可考虑首先使用。

(2) 在常规位移控制法和弧长控制法中, 采用本文建议的简化路径搜寻和单因子加速方法会明显减少迭代次数和加速收敛过程。

(3) 在混凝土结构非线性全过程分析中, 如果采用单一的一种迭代控制方法, 即使是某种形式的弧长控制法, 收敛效果有时也会极慢或根本不收敛。因此, 在混凝土结构的非线性全过程分析中, 除考虑迭代加速外, 还应联合不同的迭代控制法进行迭代计算。

参 考 文 献

- 1 江见鲸. 钢筋混凝土结构非线性有限元分析. 西安: 陕西科学技术出版社, 1994
- 2 E Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 15, 1979, 529 - 551
- 3 I M May, Y Duan. Local arc - length procedure for strain softening. *Computers and Structures*. Vol. 64, No. 1, 1997, 297 - 303
- 4 E Ramm. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: Wunderlich W, Bathe K J eds *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. New York, 1981, 68 - 89
- 5 M A Crisfield. An arc - length method including line searches and accelerations. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, 1983, 1269 - 1289
- 6 Y T Feng. New criterion for determination of initial loading parameter in arc - length methods. *Computers and Structures*. Vol. 58, No. 3, 1996, 479 - 485
- 7 J L Batoz, G Dhait. Incremental Displacement algorithms for nonlinear problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 14, 1979, 1262 - 1267
- 8 苏小卒. 预应力框架抗震性能的静、动试验、有限元分析和系统识别. 同济大学博士论文, 1986

Study on the Iterative Methods in the Nonlinear Full-Range Analysis of Concrete Structures

Wang Zhijun Liu Nanke

(Faculty of Civil Engineering, Chongqing Jianzhu University, 400045)

Abstract Based on the extensive study of various iterative methods, a simple but practical way of the iterative route search and acceleration is introduced into the normal displacement and arc - length methods to fit the nonlinear full - range analysis of concrete structures, by which the convergence of iteration is much improved.

Key Words concrete structures, nonlinear full - range analysis, iterative method, displacement control, arc - length control

(编辑: 袁 江)