

# 钢框架弹塑性大位移分析的单元刚度矩阵

⑤  
27-34, 110

徐伟良

(重庆建筑大学建筑工程学院 400045)

潘立本

(扬州大学建筑工程学院)

TU39/01

**摘要** 根据框架结构的塑性铰形成机理,将传统的梁柱法与有限单元法相结合,建立了梁柱简化塑性区单元模式的弹塑性大位移增量刚度矩阵。它比较全面地考虑了轴力的 $P-\Delta$ 效应、结构大位移、轴力对杆件截面极限弯矩的影响、残余应力、横截面刚度退化和塑性区长度等几何和材料非线性因素的影响,可用于钢框架结构的弹塑性大位移分析。通过采用不同材料的弯矩-曲率关系,该单元刚度矩阵还可以推广应用于钢筋混凝土框架结构的双重非线性分析。本文的成果把 C. Oran<sup>[1]</sup>和 M. F. Giberson<sup>[2]</sup>的工作推进了一步。

**关键词** 弹塑性, 大位移, 刚度矩阵, 钢框架, 钢结构  
中图分类号 TU323.5

有限单元法是解决大型复杂结构分析计算问题的有效数值方法,但将非线性有限元理论应用于钢框架结构的非线性分析,应以正确合理的非线性分析单元模式为基础,若单元模式选择不当,就会导致错误的结果。因此,在进行钢框架非线性分析时,最关键的工作就是建立结构杆件的非线性单元模式及其刚度矩阵。

钢框架结构在荷载作用下,由于工程材料本构关系的非线性、梁柱节点连接区域的非线性以及框架结构本身变形引起的几何非线性效应等因素的影响,使结构整体、结构构件、结构连接区域和构件截面对荷载的反应呈现既是几何非线性又是材料非线性状态,并由此引起结构的塑性变形和内力重分布现象。当前,关于钢框架非线性分析的研究仍是国内外学者所关注的热门课题<sup>[3]</sup>。

本文根据框架结构在加载试验中表现出来的塑性铰形成机理,应用泛函的最小势能原理,将传统的梁柱理论与非线性有限单元法相结合,就本文的梁柱简化塑性区单元模式,推导了修正拉格朗日列式的弹塑性大位移增量刚度矩阵。它比较全面地考虑了轴力的 $P-\Delta$ 效应、结构大位移、轴力对杆件截面极限弯矩的影响、残余应力、横截面刚度退化和塑性区长度等几何和材料非线性因素的影响,可用于钢框架结构的弹塑性大位移分析。

## 1 基本假定

1)整个结构具有大位移、大转角,但应变很小,即每个单元的伸长和相对转角都很小;

收稿日期:1997-09-21

徐伟良,男,1952年生,博士,副教授

重庆中青年科技专家基金资助项目

- 2) 杆件的塑性变形仅发生在杆端附近的局部区域, 塑性铰只在杆端出现;
- 3) 横截面刚度的退化是线性的;
- 4) 不考虑塑性铰处的卸载现象;
- 5) 楼板平面刚度无限大, 并有足够的构造措施使杆件不发生局部屈曲和平面外屈曲;
- 6) 杆件剪切变形的影响忽略不计。

## 2 平面杆系大变形分析中的单元刚度方程

几何非线性问题主要是指大位移大应变或大位移小应变引起的非线性, 它涉及应变-位移的非线性几何关系和依赖于变形的平衡方程等问题。在此, 统称这两种情况为大变形问题。

在结构有限元分析中, 变分法可以为建立结构体系的控制平衡方程提供一个较为容易的方法。因为可以把杆件(单元)位移作为未知函数, 体系的标量泛函就是结构总势能  $\Pi$ , 而未知函数  $u$  的解对应于  $\Pi$  的极小值, 这就是变分原理的最小势能原理形式。

图 1 所示为一发生大位移的梁柱单元, 设以  $AB$  和  $A'B'$  表示杆件在变形前和变形后的位形; 以  $x, y$  和  $x', y'$  表示单元的拉格朗日坐标和欧拉坐标轴; 以  $q_1, q_2, \dots, q_6$  ( $q_1 = u_1, q_2 = v_1, q_3 = \theta_1, q_4 = u_2, q_5 = v_2, q_6 = \theta_2$ ) 来表示变形杆件  $A'B'$  在拉格朗日坐标系中的广义位移, 它在欧拉坐标系中的广义位移以杆端转角  $\theta_A, \theta_B$  和弦长改变量  $u$  表示。由图 1 所示的几何关系可见:

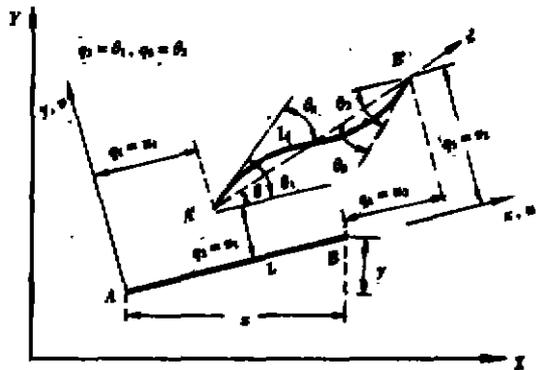


图 1 梁柱单元坐标系

$$\theta_A = \theta_1 - \theta \tag{1}$$

$$\theta_B = \theta_2 - \theta \tag{2}$$

$$u = [(u_2 - u_1 + L)^2 + (v_2 - v_1)^2]^{1/2} - L \tag{3}$$

式中:

$$L = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \text{tg}^{-1} \left( \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1 + L} \right)$$

选取合适的形函数和应变-位移关系式, 就可把轴向应变  $\epsilon$  和应变能  $U$  表示成  $q_i$  的函数, 此处,  $q_i (i = 1, 2, 3)$  分别表示  $\theta_A, \theta_B$  和  $u$ 。于是:

$$U = U(q_i) = \int_V \left( \frac{1}{2} E \right) \epsilon^2 dV \tag{4}$$

则系统的总势能可以写成:

$$\Pi = U - [P_1 \ P_2 \ P_3] [q_1 \ q_2 \ q_3]^T \tag{5}$$

式中,  $P_i$  是对应于  $q_i$  的广义力。由最小势能原理可得:

$$\frac{\partial U}{\partial \{q^e\}} = [K_T] \{q^e\} = \{p^e\} \quad (6)$$

这即是欧拉坐标系中的梁柱单元刚度方程。

式中,  $[K_T]$  为欧位坐标系中的切线刚度矩阵, 其元素为:

$$K_{T,uv} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_k^i \partial q_l^j} \quad (7)$$

注意到:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_k^i} \cdot \frac{\partial q_k^i}{\partial q_i} \quad (8)$$

故可得拉格朗日坐标系中的单元刚度矩阵的元素:

$$K_{r,uv} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_k^i \partial q_l^j} \cdot \frac{\partial q_k^i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_l^j}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_k^i} \cdot \frac{\partial^2 q_k^i}{\partial q_i \partial q_j} \quad (9)$$

$\frac{\partial q_k^i}{\partial q_i}$  和  $\frac{\partial^2 q_k^i}{\partial q_i \partial q_j}$  的结果可直接由式(1)~(3)的求导运算得到:

$$\left[ \frac{\partial q_k^i}{\partial q_i} \right] = [A] = \begin{bmatrix} -\frac{n}{L_f} & \frac{m}{L_f} & 1 & \frac{n}{L_f} & -\frac{m}{L_f} & 0 \\ -\frac{n}{L_f} & \frac{m}{L_f} & 0 & \frac{n}{L_f} & -\frac{m}{L_f} & 1 \\ -m & -n & 0 & m & n & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中,  $n = \sin\theta$ ,  $m = \cos\theta$ ,  $L_f = [(u_2 - u_1 + L)^2 + (v_2 - v_1)^2]^{\frac{1}{2}}$ 。

$$\left[ \frac{\partial^2 q_k^i}{\partial q_i \partial q_j} \right] = \left[ \frac{\partial^2 q_l^j}{\partial q_i \partial q_j} \right] = [B] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & 0 & -b_1 & -b_2 & 0 \\ -b_1 & 0 & -b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对称} & & b_1 & b_2 & 0 & \\ & & & -b_1 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 q_k^i}{\partial q_i \partial q_j} \right] = [C] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & -c_1 & -c_2 & 0 \\ m^2/L_f & 0 & -c_2 & m^2/L_f & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \text{对称} & & c_1 & c_2 & 0 & \\ & & & m^2/L_f & 0 & \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

矩阵  $[B]$  和  $[C]$  均具有对称形式, 其中的非零项元素为:

$$b_1 = \frac{-2mn}{L_f^3}; \quad b_2 = \frac{(m^2 - n^2)}{L_f^3}; \quad c_1 = \frac{n^2}{L_f^3}; \quad c_2 = \frac{-mn}{L_f^3}。$$

应用式(10)~(12)的结果, 并注意到(6)式, 可将式(9)写成:

$$[K_r] = [A]^T [K_T] [A] + [P_1 \ P_2 \ P_3] ([B] [B] [C])^T \quad (13)$$

在结构非线性问题的求解中, 最基本的是增量法。若将图1中杆件在变形前的位形  $AB$  取为初始状态, 则式(13)称为完全拉格朗日列式 (Total Lagrange) 的大位移增量刚度矩阵。但若将位形  $AB$  视作杆件变形后的位形  $A'B'$  的前一个相邻状态, 则式(13)即为修正拉格朗日

列式(Updated Lagrange)的大位移增量刚度矩阵。

### 3 考虑 $P-\Delta$ 效应的单元非线性刚度矩阵

框架结构中的  $P-\Delta$  效应也称为轴向力二阶效应,它将降低单元弯曲刚度。考虑图 2 所示梁柱单元,设该单元的相对变形在整个加载过程中都很小,尽管整个结构此时已发生了大的位移和转角(即上述假定(1)情形)。在这前提下,通常的梁柱理论仍然用来表达梁柱单元的内力与变形关系。由经典梁柱理论中的转角-位移法<sup>[4]</sup>即可得到二阶弹性分析的单元刚度方程:

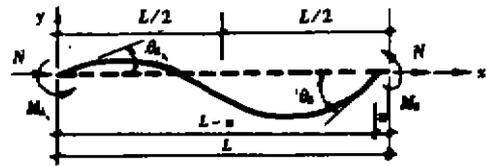


图 2 典型梁柱单元

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ N \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4\varphi_1 & 2\varphi_2 & 0 \\ 2\varphi_2 & 4\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ u \end{Bmatrix} \quad (14)$$

式中,  $\lambda^2 = \frac{NL}{EI}$ ,  $\varphi_1, \varphi_2$  称为稳定函数。当轴力  $N$  为压力时:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\Phi(\sin\Phi - \Phi\cos\Phi)}{4\Phi_c}, & \varphi_2 &= \frac{\Phi(\Phi - \sin\Phi)}{2\Phi_c} \\ \varphi_c &= 2 - 2\cos\Phi - \Phi\sin\Phi, & \Phi^2 &= \frac{NL^2}{EI} \end{aligned}$$

当轴力  $N$  为拉力时:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\Phi(\sin h\Phi - \Phi\cosh\Phi)}{4\Phi_c}, & \varphi_2 &= \frac{\Phi(\sin h\Phi - \Phi)}{2\Phi_c} \\ \varphi_c &= 2 - 2\cosh\Phi + \Phi\sinh\Phi, & \Phi^2 &= \frac{NL^2}{EI} \end{aligned}$$

当轴力  $N$  为零时:  $\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 1$

## 4 单元二阶弹塑性增量刚度矩阵

### 4.1 梁柱简化塑性区单元模式

一般说来,钢框架呈现的材料非线性响应主要可由下述一些因素引起:

1) 塑化效应,即由于工程材料非线性的本构关系,引起材料的塑性沿着杆件横截面高度和杆件长度方向逐渐发展的现象;

2) 多维塑性效应,即轴向力对于杆件横截面弯矩-轴力-曲率关系曲线和塑性极限弯矩的影响;

3) 杆件残余应力和初始几何缺陷;

4) 连接区域中半刚度连接的非线性变形;

5) 杆件屈服面的弹性卸载。

为了考虑上述(1)~(3)方面的影响,根据本文的基本假定,提出一种用于钢框架非线性有限元分析的梁柱简化塑性区单元模式(图3)。它由两类区域组成:位于中部的弹性区和位于两端的变长度弹塑性区。对于单元两端的连接区,则可以假定为刚性连接区域。

在杆端力增量作用下,只要确定了弹塑性区段的刚度和长度,即可建立梁柱简化塑性区单元的刚度矩阵。

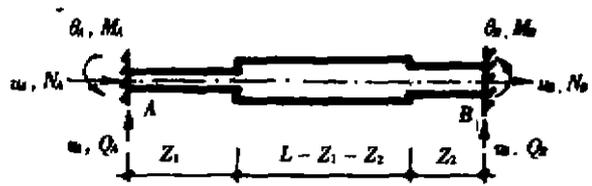


图3 简化塑性区单元模式

4.2 标准化切线模量和刚度影响系数

若在杆件截面初始屈服后的 A 点继续加载(见图4),则可得弯矩增量和曲率增量之间的关系式为:

$$\Delta M = K \Delta \varphi = K(\Delta \varphi_e + \Delta \varphi_p) \quad (15)$$

或者

$$\Delta M = f K_0 \Delta \varphi_p = f K_0(\Delta \varphi - \Delta \varphi_e) \quad (16)$$

式中,  $K_0 = EI$ ,  $\Delta \varphi_e$ 、 $\Delta \varphi_p$  分别为弹性曲率增量和塑性曲率增量,  $f$  称为相关系数。

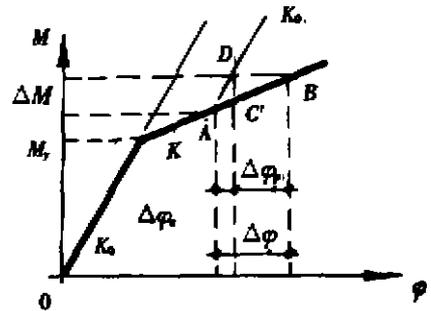


图4 M-φ 关系曲线

因已假定  $k$  值的退化是线性的,由文献[5]可得标准化切线模量  $E_t$  为:

$$E_t = \frac{dm}{d\Phi} = 1 - \frac{M - M_x}{M_{px} - M_x} \quad (\text{当 } M \geq M_x) \quad (17)$$

式中,  $m = \frac{M}{M_p}$ ,  $\Phi = \frac{\varphi}{\varphi_y}$ ,  $M_x = (1-n)M_y$ ,  $M_{px} = (1-n^3)M_p$ ,  $n = \frac{N}{N_y}$ , 而  $M_y$  为截面初始屈服弯矩,  $M_p$  为截面塑性极限弯矩,  $N_y$  为屈服轴力。若引入刚度影响系数  $S = \frac{K}{K_0} = \frac{E_t I}{EI} = \frac{E_t}{E}$ , 则有:  $f = \frac{S}{(1-S)} = \frac{E_t}{E - E_t}$ 。

当简捷地考虑残余应力影响时<sup>[5]</sup>,只须取  $M_x = 0.9(1 - 1.25n)M_y$ 。

若要考虑轴向力对杆件截面塑性极限弯矩的影响,则对于绕强轴弯曲,由文献[6]可采用如下的实用方程:

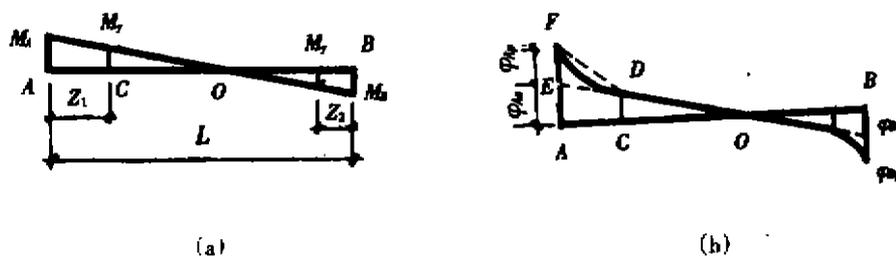
$$M_{px} = M_p \quad (N \leq 0.15 N_y \text{ 时}) \quad (18)$$

$$\frac{M_{px}}{M_p} = 1.18 \left( 1 - \frac{N}{N_y} \right) \leq 1 \quad (N > 0.15 N_y \text{ 时}) \quad (19)$$

式中,  $M_{px}$  为考虑轴向力影响的截面塑性极限弯矩。

4.3 塑性区长度和塑性变形影响系数

设杆件的弯矩和曲率分布如图5所示。其中 A 端的弯矩值已超过屈服极根, C 点为临界截面, AC 段为弹塑性区段。若单元内无分布荷载作用,则由 AC 段脱离体的平衡条件得:

图 5 弯矩( $M$ )、曲率( $\varphi$ )图

$$Z_1 = \frac{[M_A - (M_y \cdot SN_1)] \cdot L}{(M_A + M_B)} \quad (20)$$

同理有:

$$Z_2 = \frac{[M_B - (M_y \cdot SN_2)] \cdot L}{(M_A + M_B)} \quad (21)$$

式中,  $M_y$  表示当前轴力下的计算屈服弯矩,  $SN_1 = \frac{|M_A|}{M_A}$ ,  $SN_2 = \frac{|M_B|}{M_B}$ ,  $Z$  表示塑性区长度。

令  $\theta_A$ 、 $\theta_B$  分别表示 A、C 端的总转角, 令  $\theta_{Ac}$ 、 $\theta_{Ap}$  分别表示 A 端的弹性转角和塑性转角。由图 5(b) 可得:

$$\theta_{Ap} = \int_x^{z_1} \varphi_{PD} dx - \int_x^{z_1} \varphi_{ED} dx = \frac{1}{2} (\overline{AC} \cdot \overline{FE}) = \frac{1}{2} (\varphi_{Ap} \cdot Z_1) \quad (22)$$

因此有:

$$\Delta\theta_{Ap} \approx \frac{1}{2} (\Delta\varphi_{Ap} \cdot Z_1) \quad (23)$$

对于曲率沿弹塑性区段为任意曲线分布的情况, 当计算曲边三角形的面积时, 可用  $\alpha$  代以系数 1/2, 这样有:

$$\Delta\varphi_{Ap} = \frac{1}{Z} (\alpha \cdot \Delta\theta_{Ap}) = \gamma \cdot \Delta\theta_{Ap} \quad (24)$$

式中,  $\gamma$  称为塑性变形影响系数, 比例系数  $\alpha$  的具体值取决于  $\Delta\varphi$  在弹塑性区上的分布情况: 直线、二次曲线、三次曲线等。

#### 4.4 单元二阶弹塑性增量刚度矩阵的推导

由式(16)和(24)可得:

$$\Delta M_A = f_A K_{0A} \gamma_A (\Delta\theta_A - \Delta\theta_{Ac}) \quad (25)$$

$$\Delta M_B = f_B K_{0B} \gamma_B (\Delta\theta_B - \Delta\theta_{Bc}) \quad (26)$$

对于等截面直杆, 可由式(14)得到梁柱单元仅当杆端产生增量转角情况下的二阶弹性刚度矩阵的增量表达式为:

$$\Delta M_A = \frac{EI}{L} (4\varphi_1 \Delta\theta_{Ac} + 2\varphi_2 \Delta\theta_{Bc}) \quad (27)$$

$$\Delta M_B = \frac{EI}{L} (2\varphi_2 \Delta\theta_{Ac} + 4\varphi_1 \Delta\theta_{Bc}) \quad (28)$$

令式(25)、(26)和式(27)、(28)分别相等, 并求解由此得到的联立方程组, 可得:

$$\Delta\theta_A = \frac{L f_A \gamma_A (4\varphi_1 + L f_B \gamma_B) \Delta\theta_A - 2L \varphi_2 f_B \gamma_B \Delta\theta_B}{(4\varphi_1 + L f_A \gamma_A) (4\varphi_1 + L f_B \gamma_B) - 4\varphi_1^2} \quad (29)$$

$$\Delta\theta_B = \frac{-2\varphi_2 L f_A \gamma_A \Delta\theta_A + L f_B \gamma_B (4\varphi_1 + L f_A \gamma_A) \Delta\theta_B}{(4\varphi_1 + L f_A \gamma_A) (4\varphi_1 + L f_B \gamma_B) - 4\varphi_1^2} \quad (30)$$

考虑到  $f_A = \frac{S_A}{1-S_A}$ ,  $f_B = \frac{S_B}{1-S_B}$ , 再令  $n_A = \frac{1}{LY_A}$ ,  $n_B = \frac{1}{LY_B}$ , 将上两式代入式(25)和(26), 即可得:

$$\Delta M_A = \frac{EI}{L} (D_1 \Delta\theta_A + D_2 \Delta\theta_B) \quad (31)$$

$$\Delta M_B = \frac{EI}{L} (D_2 \Delta\theta_A + D_3 \Delta\theta_B) \quad (32)$$

式中,

$$D_1 = \frac{4S_A [(4\varphi_1^2 - \varphi_1^2) (1-S_B) n_B + \varphi_1 S_B]}{4(1-S_A) n_A [(4\varphi_1^2 - \varphi_1^2) (1-S_B) n_B + \varphi_1 S_B] + S_A [4\varphi_1 (1-S_B) n_B + S_B]} = \frac{4S_A B_1}{D}$$

$$D_2 = \frac{2S_A S_B \varphi_2}{D}, \quad D_3 = \frac{4S_B [(4\varphi_1^2 - \varphi_1^2) (1-S_A) n_A + \varphi_2 S_A]}{D} = \frac{4S_B B_2}{D}$$

若考虑单元的轴向变形, 则式(31)和(32)可写成如下的矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_A \\ \Delta M_B \\ \Delta N \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_A \\ \Delta\theta_B \\ \Delta u \end{Bmatrix} = [K]_{\varphi} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_A \\ \Delta\theta_B \\ \Delta u \end{Bmatrix} \quad (33)$$

式(33)中的  $[K]_{\varphi}$  即为图3所示梁柱简化塑性区单元模式在欧拉坐标系中的二阶弹塑性增量刚度矩阵。

## 5 钢框架弹塑性大位移分析的单元刚度矩阵

这里将应用前述关于平面杆系大变形分析中的有关公式, 并以式(33)为基础, 建立钢框架弹塑性大位移分析的单元增量刚度矩阵。

设图1所示典型梁柱单元为发生大位移的简化塑性区单元(参见图3), 图中的各符号仍如前所定义。

显然, 由式(13)可得:

$$[K_T]_{EP} = [A]^T [K]_{\varphi} [A] + [\Delta M_A \quad \Delta M_B \quad \Delta N] ([B] [B] [C])^T \quad (34)$$

将式(10)、(11)和(12)代入上式, 令  $R = \frac{EI}{L}$ ,  $\lambda^2 = \frac{L^2 A}{I}$  并取  $L_f = L$ , 则可得:

$$[K_T]_{EP} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_4 & -a_1 & -a_2 & a_7 \\ & a_3 & a_5 & -a_2 & -a_3 & a_8 \\ & & a_6 & -a_4 & -a_5 & a_9 \\ & & & a_1 & a_2 & -a_7 \\ \text{对称} & & & & a_3 & -a_8 \\ & & & & & a_{10} \end{bmatrix} \quad (35)$$

式中,  $a_1 = [n^2(D_4 + D_5) + m^2 \lambda^2] R - 2nm(\Delta M_A + \Delta M_B) + n^2 \Delta NL$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= [\lambda^2 - (D_4 + D_5)]nmR + (m^2 - n^2)(\Delta M_A + \Delta M_B) - nm\Delta NL \\
 a_3 &= [m^2(D_4 + D_5) + n^2\lambda^2]R + 2nm(\Delta M_A + \Delta M_B) + m^2\Delta NL \\
 a_4 &= -nD_4RL & a_5 &= mD_4RL & a_6 &= D_1RL^2 \\
 a_7 &= -nD_5RL & a_8 &= mD_5RL & a_9 &= D_2RL^2 \\
 a_{10} &= D_3RL^2 & D_4 &= D_1 + D_2 & D_5 &= D_2 + D_3 \\
 n &= \sin\theta = \frac{v_2 - v_1}{L_f} & m &= \cos\theta = \frac{u_2 - u_1 + L}{L_f} \\
 L_f &= [(u_2 - u_1 + L)^2 + (v_2 - v_1)^2]^{\frac{1}{2}} & L &= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\
 \theta &= \text{tg}^{-1} \left( \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1 + L} \right)
 \end{aligned}$$

上式即为修正拉格朗日坐标系中梁柱简化塑性区单元弹塑性大位移增量刚度矩阵，可用于钢框架的弹塑性大位移分析。

在修正拉格朗日列式中，每个单元的局部参考状态均为上次算得的位形，因此，单元刚度矩阵式(35)是建立在上一级荷载末时刻的局部坐标系上，必须将它们转换到整体坐标系后才能组装成结构总体刚度矩阵。

## 6 结 语

本文建立的梁柱简化塑性区单元弹塑性大位移增量刚度矩阵，比较全面地考虑了轴力的 P-Delta 效应、结构大位移、轴力对杆件截面极限弯矩的影响、残余应力、横截面刚度退化和塑性区长度等几何和材料非线性因素的影响，可用于钢框架结构的弹塑性大位移分析。本文的成果把 C.Oran 和 M.F.Giberson 等人的工作推进了一步。

### 参 考 文 献

- 1 Oran C. Tangent Stiffness in Plane Frames, J Struct. Div., ASCE, 1973, 99(6)
- 2 Giberson M. F. Two Nonlinear Beams with Definitions of Ductility, J. Struct. Div., ASCE, 1969, 95(ST2)
- 3 Structural Stability Research Council - U.S. A. Plastic Hinge Based Methods for Advanced Analysis and Design of Steel Frames, Program and Preliminary Paper, 1992
- 4 Livesley R. K. Matrix Methods of structural Analysis, 2nd Edition, Pergamon Press, New York, 1975
- 5 King W. S., White D. W. and Chen W. F. A Modified Plastic Hinge Method for Second - order Inelastic Analysis of Rigid Frames, Struct. Engrg. Review 1987, 4(1)
- 6 吕烈武, 沈世钊, 沈祖炎, 胡学仁. 钢结构构件稳定理论. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983

(下转第 110 页)

8 C. Dhan, Rheology in Polymer Processing, Academic Press, New York, 1976

9 余构松. FRPP 在拉伸状态下的粘弹性: [学位论文]. 武汉: 武汉工业大学, 1989

## Study on Dynamic Rheological Properties of Modified Bitumen Used for Road

*Wang youpin Yu Jianyin Tan Yuhong*

(Wuhan University of Technology, 430070)

**Abstract** The quantitative relationships between the brittleness at low temperature of bitumen and modified bitumen and their rheological parameters  $[E]$ ,  $E'$ ,  $E''$  have been found in this paper by DMA. The laws of  $T_g$  variation with the temperatures have been investigated. The rheological equations of modified bitumen under dynamic loads have been set up. All these have provided theoretical bases for the modification of bitumen.

**Key Words** modified bitumen, brittleness, rheological parameter

(编辑: 刘家凯)

(上接第 34 页)

## An Element Stiffness Matrix for Large - Displacement Elastic - Plastic Analysis of Steel Frames

*Xu Weiliang*

(Faculty of Civil Engineering, Chongqing Jianzhu University, 400045)

*Pan Liben*

(Faculty of Civil Engineering, Yangzhou University, 225000)

**Abstract** Based on the forming mechanism of the plastic hinge in the frame structures and combining traditional beam-column method with finite element method, an increment stiffness matrix of the simplified plastic-zone beam-column element model is derived in this paper. The stiffness matrix, which has taken into account the comprehensive influences of the  $P - \Delta$  effect of axial force, structural large-displacement, changes in the plastic-moment capacity at plastic hinges due to changes in axial force, residual stress, degradation of cross-sectional tangent stiffness and plastic zone length on the element stiffness, can be applied to perform large-displacement elastic-plastic analysis of steel frame structures. By using the appropriate moment-curvature relationship of the member section, the element stiffness matrix can be expanded to perform geometrical and material nonlinear analysis of reinforced concrete frames. The outcome of this paper has advanced, on a large scale, the research works done by C. Oran<sup>[1]</sup> and M. F. Giberson<sup>[2]</sup>.

**Key Words** elastic-plastic, large-displacement, stiffness matrix, steel frame

(编辑: 袁江)