

# 线性强化材料索网结构的变分解法

23  
115-119

贾乃文 张润民 钟景

(华南理工大学交通学院 广州 510641)

TU351.01

**摘要** 对线性强化材料的单索及索网结构推导出变形协调方程与应变能表达式,并用最小势能原理求解索网结构的变形及水平张力。

**关键词** 强化材料,索网结构,势能原理,变分解法

中图法分类号 TU351.01

设有一单索,其微段  $ds$  如图1所示。初始状态索中张力为  $N_0$ ,水平分量为  $H_0$ ;在受荷载  $q$  作用下,索中张力为  $N$ ,水平分量为  $H$ ,它们都是坐标  $x$  的函数。如果用  $u$  表示索中任一点  $A$  的水平位移,具有  $dx$  的水平微段在受荷作用时的水平伸长为:

$$(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (1)$$

如果用  $\theta_0$  表示索中该点处弧长曲线的切线与  $x$  轴夹角,那么微索段  $ds$  在受荷时的总伸长  $\Delta ds$  表示为

$$\Delta ds = \sec\theta_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx + (\sec\theta - \sec\theta_0) dx \quad (2)$$

线性强化材料的应力-应变关系如图2所示,其公式为

$$\epsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E} & (\sigma \leq \sigma_s) \\ \frac{\sigma - \sigma_s}{E_1} + \epsilon_s & (\sigma > \sigma_s) \end{cases} \quad (3)$$

假设索的初始状态是弹性范围,初始状态索段长为  $ds_0$ ,受荷之后索段长为  $ds$ ,利用(3)式表达强化范围  $ds$ ,则有

$$\frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{EA}{EA + N_0} \left[ \frac{N}{EA} - \frac{N_0}{EA} + \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_s \right] \quad (4)$$

式中  $A$  为索的截面积。

又考虑到:

$$\begin{aligned} N_0 &= H_0 \sec\theta_0 \\ N &= H \sec\theta \end{aligned} \quad (5)$$

在小挠度变形条件下,近似地有  $\sec\theta \cong \sec\theta_0$ ,从(5)式可以写出

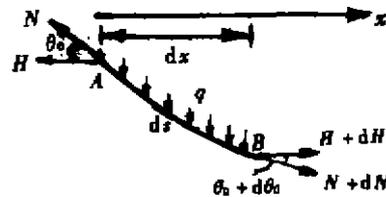


图1 悬索微段 ds

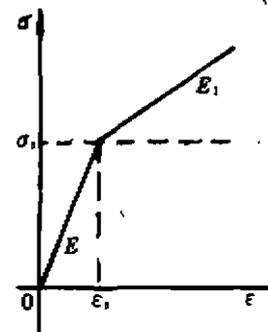


图2 线性强化  $\sigma - \epsilon$

$$N = H \sec \theta_0 \tag{6}$$

将(5)、(6)式代入(4)式,计入  $ds_0 = dx \sec \theta_0$ , 得

$$\Delta ds = ds - ds_0 = \frac{EA \sec \theta_0}{EA + H_0 \sec \theta_0} \left[ \frac{H \sec \theta_0}{E_1 A} - \frac{H_0 \sec \theta_0}{EA} + \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_s \right] dx \tag{7}$$

将(2)与(7)式比较, 得出

$$\cos \theta_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (\sec \theta - \sec \theta_0) = \left[ \frac{H \sec \theta_0}{E_1 A} + \frac{H_0 \sec \theta_0}{EA} + \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_s \right] \cdot \frac{EA \sec \theta_0}{EA + H_0 \sec \theta_0} \tag{8}$$

经整理得出  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , 然后对全部索长积分, 设索水平长为  $l$ , 并  $x = 0, x = l$  处索支承无水平位移, 则有

$$H \int_0^l \frac{E \sec^3 \theta_0}{E_1 (EA + H_0 \sec \theta_0)} dx - H_0 \int_0^l \frac{E \sec^3 \theta_0}{EA + H_0 \sec \theta_0} dx + \int_0^l \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E_1} \right) \frac{EA \sigma_s \sec^3 \theta_0}{EA + H_0 \sec \theta_0} dx = \int_0^l (\sec \theta - \sec \theta_0) \sec \theta_0 dx \tag{9}$$

(9)式表示了索的变形协调条件。是本文推导的关于线性强化材料索的协调方程, 在利用变分法求索网结构时要利用这一方程。

图 3 表示在弹性范围的微索段  $ds_0$ , 在受荷达到强化阶段时, 索长与张力的关系。

其应变能增量为

$$dU = \frac{N_s + N_0}{2} (ds_s - ds_0) + \frac{N_s + N_s}{2} (ds - ds_s) \tag{10}$$

式中  $N_s = \sigma_s \cdot A$ , 表示索截面的弹性极限张力, 并由此得

$$ds_s - ds_0 = \frac{N_s - N_0}{EA + N_0} ds_0 \tag{11}$$

类似地得出

$$ds - ds_s = \frac{EA}{EA + N_0} \left[ \frac{N}{EA} - \frac{N_s}{EA} + \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_s \right] ds_0 \tag{12}$$

最后得出  $dU$  为

$$dU = \frac{H^2 E \sec^3 \theta_0 - H_0^2 E_1 \sec^3 \theta_0 + (E_1 - E) \sigma_s^2 A^2 \sec \theta_0}{2E_1 (EA + H_0 \sec \theta_0)} dx \tag{13}$$

对索长积分, 求出  $U$  为

$$U = H^2 \int_0^l \frac{E \sec^3 \theta_0}{2E_1 (EA + H_0 \sec \theta_0)} dx - H_0^2 \int_0^l \frac{\sec^3 \theta_0}{2(EA + H_0 \sec \theta_0)} dx + \int_0^l \frac{(E_1 - E) \sigma_s^2 A^2 \sec \theta_0}{2E_1 (EA + H_0 \sec \theta_0)} dx \tag{14}$$

另一方面, 外力功  $W$  为

$$W = \int_0^l g(z - z_0) dx \tag{15}$$

式中  $z$  为索的挠度,  $z_0$  为索的初始挠度。

索的总势能  $\Pi$  为

$$\Pi = U - W = H^2 \int_0^l \frac{E \sec^3 \theta_0}{2E_1 (EA + H_0 \sec \theta_0)} dx - H_0^2 \int_0^l \frac{\sec^3 \theta_0}{2(EA + H_0 \sec \theta_0)} dx +$$

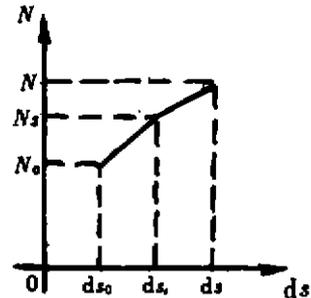


图 3 索长与张力关系

$$\int_0^l \frac{(E_1 - E) \sigma_1^2 A^2 \sec \theta_0}{2 E_1 (EA + H_0 \sec \theta_0)} dx - \int_0^l q(z - z_0) dx \quad (16)$$

由最小势能原理  $\delta \Pi = 0$ , 可以求出索的位移与内力。

可以证明, 当变形协调方程 (9) 式为已知时, 由上述的变分原理可以推导出单索的平衡方程<sup>[4]</sup>

$$H \frac{d^2 z}{dx^2} = -q \quad (17)$$

类似地可以推导出索网结构的总余能。如果令  $U_x$  表示  $x$  方向单位宽索的应变能, 则有

$$U_x = \int_{-l_x}^{l_x} (H_x^2 G_x - H_{x0}^2 J_x + \sigma_1^2 A^2 K_x) dx \quad (18)$$

其中矩形索网为  $2l_x \times 2l_y$ , 坐标选在结构中心

$$\begin{aligned} G_x &= \frac{E \sec^3 \theta_{x0}}{2 E_1 (EA_x + H_{x0} \sec \theta_{x0})} \\ J_x &= \frac{\sec^3 \theta_{x0}}{2 (EA_x + H_{x0} \sec \theta_{x0})} \\ K_x &= \frac{(E_1 - E) \sec \theta_{x0}}{2 E_1 (EA_x + H_{x0} \sec \theta_{x0})} \end{aligned} \quad (19)$$

在  $y$  方向单位宽度上索应变能  $U_y$  为

$$U_y = \int_{-l_y}^{l_y} (H_y^2 G_y - H_{y0}^2 J_y + \sigma_1^2 A^2 K_y) dy \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} G_y &= \frac{E \sec^3 \theta_{y0}}{2 E_1 (EA_y + H_{y0} \sec \theta_{y0})} \\ J_y &= \frac{\sec^3 \theta_{y0}}{2 (EA_y + H_{y0} \sec \theta_{y0})} \\ K_y &= \frac{(E_1 - E) \sec \theta_{y0}}{2 E_1 (EA_y + H_{y0} \sec \theta_{y0})} \end{aligned} \quad (21)$$

以上式中的  $\theta_{x0}$  是  $x$  方向索在  $(x, y)$  点的切线与  $y$  轴之夹角;  $\theta_{y0}$  是  $y$  方向索在该点的切线与  $x$  轴之夹角。

综合  $x$  方向与  $y$  方向的应变能, 考虑到索网的外力功  $W$

$$W = \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} q(z - z_0) dx dy \quad (22)$$

得索网结构的总势能  $\Pi$  为

$$\begin{aligned} \Pi &= U - W \\ &= \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} [(H_x^2 G_x - H_{x0}^2 J_x + \sigma_1^2 A^2 K_x) + (H_y^2 G_y - H_{y0}^2 J_y + \sigma_1^2 A^2 K_y) - q(z - z_0)] dx dy \end{aligned} \quad (23)$$

在利用变分原理对索网结构进行求解, 还要列出相应于任意初始垂度与初始张力的索网变形协调方程, 其分别在  $x$  与  $y$  方向的表达为

$$2 \int_{-l_x}^{l_x} (H_x G_x - H_{x0} J_x + \sigma_1 A K_x) dx = \int_{-l_x}^{l_x} (\sec \theta_x - \sec \theta_{x0}) \sec \theta_{x0} dx \quad (24)$$

$$2 \int_{-l_y}^{l_y} (H_y G_y - H_{y0} J_y + \sigma_1 A K_y) dy = \int_{-l_y}^{l_y} (\sec \theta_y - \sec \theta_{y0}) \sec \theta_{y0} dy \quad (25)$$

以上由(23)~(25)方程组成了索网结构变分解法的基本方程。

利用变分法求索网结构时,首先假设出一个包含有若干待定系数的索网形状函数  $z^*$  ( $a_1, a_2, \dots, a_n, x, y$ ),然后由变形协调方程求得带有未知系数的  $H_x^*$  ( $a_1, a_2, \dots, a_n, x, y$ ) 和  $H_y^*$  ( $a_1, a_2, \dots, a_n, x, y$ ),接着把  $z^*, H_x^*, H_y^*$  及外荷载  $q(x, y)$  等代入总势能,得出相应的总势能  $\Pi^*(a_1, a_2, \dots, a_n, x, y)$ 。然后由最小势能原理,将  $\Pi^*$  取极值  $\frac{\partial \Pi^*}{\partial a_i} = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 。得出  $n$  个代数方程,解出  $n$  个待定系数。再代入  $z^*, H_x^*, H_y^*$  中,便得出确定形式的  $z(x, y), H_x, H_y$  的值。

算例:设有线性强化材料组成的平面为矩形的正交索网结构,  $x$  方向长为  $2a$ ,  $y$  方向长为  $2b$ ,坐标原点在中点。设初始状态索网不受外荷载作用,即  $z_0(x, y) = 0$ 。

用变分方法求解这一索网结构,假定索网在加载后,其挠度形状为

$$z^*(x, y) = c(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

其中  $c$  为待定常数。相应的变形协调方程为

$$H_x^* = \frac{E_1}{E} H_{x0} + (1 - \frac{E_1}{E}) \sigma_x A_x + \frac{2}{3} c^2 a^2 (y^2 - b^2)^2 \frac{E_1 (EA_x + H_{x0})}{E}$$

$$H_y^* = \frac{E_1}{E} H_{y0} + (1 - \frac{E_1}{E}) \sigma_y A_y + \frac{2}{3} c^2 b^2 (x^2 - a^2)^2 \frac{E_1 (EA_y + H_{y0})}{E}$$

式中  $A_x, A_y$  分别为单位宽索网在  $x, y$  方向截面积。

将  $z^*, H_x^*, H_y^*$  代入总势能表达式,得

$$\begin{aligned} \Pi^* = & \frac{E}{E_1 (EA_x + H_{x0})} \left\{ 2ab \left[ \frac{E_1}{E} H_{x0} - \frac{\sigma_x A_x (E_1 - E)}{E} \right]^2 + \right. \\ & \frac{64}{45} a^3 b^3 c^2 \frac{E_1 (EA_x + H_{x0})}{E} \left[ \frac{E_1}{E} H_{x0} - \frac{\sigma_x A_x (E_1 - E)}{E} \right] + \\ & \left. \frac{1024}{2835} a^5 b^9 c^4 \frac{E_1^2 (EA_x + H_{x0})^2}{E^2} \right\} - H_{x0}^2 \frac{2ab}{(EA_x + H_{x0})} + \\ & \sigma_x^2 A_x^2 \frac{2ab (E_1 - E)}{E_1 (EA_x + H_{x0})} + \frac{E}{E_1 (EA_y + H_{y0})} \left\{ 2ab \left[ \frac{E_1}{E} H_{y0} - \frac{\sigma_y A_y (E_1 - E)}{E} \right]^2 + \right. \\ & \left. \frac{64}{45} a^5 b^3 c^2 \frac{E_1 (EA_y + H_{y0})}{E} \left[ \frac{E_1}{E} H_{y0} - \frac{\sigma_y A_y (E_1 - E)}{E} \right] + \right. \\ & \left. \frac{1024}{2835} a^9 b^5 c^4 \frac{E_1^2 (EA_y + H_{y0})^2}{E^2} \right\} - H_{y0}^2 \frac{2ab}{(EA_y + H_{y0})} + \\ & \sigma_y^2 A_y^2 \frac{2ab (E_1 - E)}{E_1 (EA_y + H_{y0})} - \frac{16}{9} qca^3 b^3 \end{aligned}$$

由最小势能原理  $\delta \Pi^* = 0$

得出

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{8}{5} b^2 \left[ \frac{E_1}{E} H_{x0} - \frac{\sigma_x A_x (E_1 - E)}{E} \right] c + \frac{256}{351} a^2 b^6 \frac{E_1 (EA_x + H_{x0})}{E} c^3 \right\} + \\ & \left\{ \frac{8}{5} a^2 \left[ \frac{E_1}{E} H_{y0} - \frac{\sigma_y A_y (E_1 - E)}{E} \right] c + \frac{256}{351} a^6 b^2 \frac{E_1 (EA_y + H_{y0})}{E} c^3 \right\} - q = 0 \end{aligned}$$

经整理后得

$$\frac{256}{315} \left[ a^2 b^6 \frac{E_1 (EA_x + H_{x0})}{E} + a^6 b^2 \frac{E_1 (EA_y + H_{y0})}{E} \right] c^3 + \frac{8}{5} \left\{ b^2 \left[ \frac{E_1}{E} H_{x0} - \frac{\sigma_x A_x (E_1 - E)}{E} \right] + \right.$$

$$a^2 \left[ \frac{E_1 H_{y0}}{E} - \frac{\sigma_1 A_1 (E_1 - E)}{E} \right] - q = 0$$

通过上式, 代入结构计算中的材料常数, 几何与荷载参数等。即可解出待定常数  $c$ , 从而求出  $z(x, y)$ 、 $H_x$ 、 $H_y$  等。

现设  $a = 10 \text{ m}$ ,  $b = 15 \text{ m}$ ,  $A_x = 150 \text{ mm}^2/\text{m}$ ,  $A_y = 150 \text{ mm}^2/\text{m}$ ,  $\sigma_1 = 1.8 \text{ kN/mm}^2$ ,  $E = 170 \text{ kN/mm}^2$ ,  $E_1 = 100 \text{ kN/mm}^2$ ,  $H_{x0} = 180 \text{ kN/m}$ ,  $H_y = 180 \text{ kN/m}$ ,  $q = 5 \text{ kN/m}^2$ 。

则有关于  $c$  的方程为三次代数方程

$$1.67 \times 10^{13} c^3 + 1.13 \times 10^8 c - 5 = 0$$

利用数值方法解三次代数方程

$$c = 3.69 \times 10^{-5}$$

则得出位移函数

$$z(x, y) = 3.69 \times 10^{-5} (a^2 - x^2) (b^2 - y^2)$$

索网的最大垂度

$$z_{\max} = z(0, 0) = 0.83 \text{ m}$$

跨中水平张力

$$H_x(0, 0) = 286 \text{ kN/m} \quad H_y(0, 0) = 322 \text{ kN/m}$$

用另外的方法如连续化方法计算同一索网结构, 其最大垂度  $z = 0.79 \text{ m}$ , 结果十分接近。

#### 参 考 文 献

- 1 金问鲁. 悬挂结构设计. 北京: 中国建筑工业出版社, 1975: 265
- 2 贾乃文, 张润民. 线性强化材料悬索及索网计算. 土木工程学报, 1996, 29(4)
- 3 鹭津一郎. 弹性和塑性力学中的变分法. 北京: 科学出版社, 1984
- 4 张润民. 悬索及索网结构的塑性力学行为: [学位论文]. 广州: 华南理工大学, 1997
- 5 H. A. Buchholdt. 悬索屋顶结构导论. 武汉: 武汉工业大学出版社, 1990

## Variational Method of Network Structure of Linear Hardening Materials

Jia Naiwen    Zhang Runmin

(South China University of Technology, Guangzhou, 510641)

**Abstract** This paper developed out coordinate equations and equation of strain energy for suspension and network structure made of linear hardening materials. Then displacements and horizontal forces of the network are determined by principle of minimum potential energy.

**Key Words** hardening material, network structure, principle of potential energy, variational method

(编辑: 刘家凯)