

# 正交各向异性非定常渗流边界元法计算

15  
73-78

曹峻升

(上海理工大学基础部 200093)

李开海

祝家麟

(重庆建筑大学基础科学系 400045)

0357.3  
0242

**摘要** 计算各向异性介质渗流一直是一个重要研究课题,边界元法由于只在边界划分单元,可降低一维进行计算等特点,且适合于解决无限域问题,在渗流研究中具有一定的独特优点,尤其在处理含有源(漏)问题时。本文用边界元法对各向异性介质非定常渗流问题进行数值方法研究与数值计算。对非定常问题在对时间推进时要涉及到区域积分的计算,本文选取适当的坐标函数,再次应用 Green 公式将区域积分转化为边界积分,因而做到唯边界计算,充分发挥了边界元法的优势。本文用 Fortran 语言编写了边界元法计算程序 BTAM 程序,并进行了若干算例计算。

**关键词** 边界元法,唯边界法,渗流,各向异性

中图分类号 0242

边界元法在岩土渗流计算研究中有着广泛的应用。用边界元法研究非定常渗流问题比较早。早在 1927 年,Osceen 就已推导出与时间有关的方程的基本解。经过众多科学技术工作者多年的努力逐渐形成一种计算方法。这是目前研究使用较多,比较成功的一种方法。这种方法用带时间变量的基本解去解二维,三维问题,对时间递推,从而求出各时间段的数值。此外还有 Brebbia, C.A 与 Walker 1980 年提出的边界元——差分法耦合,Cruse(1968)提出的 Laplace 转换法。1988 年, Musfafa. M. Aral 和 YiTang<sup>[2]</sup>对各向同性问题提出了唯边界法,这种方法对 Laplace 算子项运用 Laplace 方程基本解或 Darcy 方程基本解进行积分求解,将时间偏导项通过引入坐标函数而进行分解,然后应用二次积分技术将区域积分全部归化到边界上积分, L.C.Wrobel(1989), Inget 和 Mitra(1989), Taigbenu 和 Liggett(1989)<sup>[9]</sup> D.Nardini 和 C.A. Brebbia(1989)<sup>[10]</sup>对此法进一步发展, Taigbenu, Liggett<sup>[9]</sup>给出了可供选择的坐标函数。

本文对唯边界法做了进一步研究,使其解决各向异性问题,并对某些算例给出计算结果。

## 1 基本公式

考察的方程为:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \sum_{l=1}^{NP} W_l \delta(x-x_l) \delta(y-y_l) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

其中  $h$  是水头,  $h = \frac{p}{\rho g} + Z$ ,  $p$  是孔隙水压力强度,  $\rho$  是流的密度,  $Z$  是高度。  $K_x, K_y$  是沿  $x, y$  轴主导方向的渗流传导系数,  $W_l$  是源(漏)率,  $(x_l, y_l), l = 1, \dots, NP$  是源(漏)的坐标。  $\delta$  是 Dirac 函数,  $NP$  是源(漏)的总个数,  $S_s = pg(\alpha + n\beta)$ ,  $S_s$  是比贮系数,  $\alpha$  是介质骨架的弹性压

收稿日期:1998-03-26

曹峻升,男,1971年生,助教

缩系数,  $n$  是介质的孔隙率,  $\beta$  是流的弹性压缩系数,  $S_c$  的物理意义是当水头下降一单位体积的介质中释放出来的流体的体积。

边界条件与初始条件为:

$$h(x, y, t) = \bar{h} \quad (x, y) \in \Gamma_1$$

$$q = K_x \frac{\partial h}{\partial x} N_x + K_y \frac{\partial h}{\partial y} N_y = \bar{q} \quad (x, y) \in \Gamma_2$$

$$h(x, y, t)|_{t=0} = h_0 \quad (x, y) \in \Omega$$

$N_x = \cos(N, x)$ ,  $N_y = \cos(N, y)$ ,  $N$  是边界的法向方向,  $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$  分别表示 Dirichlet 和 Neumann 边界条件。

对于正交各向异性介质,  $K_x \neq K_y$ , 我们把方程(1)变成积分形式:

$$\int_{\Omega} G \left[ K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^{NP} W_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \right] d\Omega = \int_{\Omega} S_c \cdot G \cdot \frac{\partial h}{\partial t} d\Omega \quad (2)$$

其中  $G$  是不带时间变量的正交各向异性 Laplace 算子的基本解。

$$G(P, Q) = \frac{-1}{2\pi \sqrt{K_x K_y}} \ln r(P, Q), \quad r = \sqrt{\frac{(x_Q - x_P)^2}{K_x} + \frac{(y_Q - y_P)^2}{K_y}}$$

满足

$$K_x \frac{\partial^2 G(P, Q)}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 G(P, Q)}{\partial y^2} = -\delta(P - Q) \quad (3)$$

根据 Green 第二公式

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (G \nabla^2 h - h \nabla^2 G) d\Omega = \int_{\Gamma} (Gq - hG^*) d\Gamma \\ G^* = K_x \frac{\partial G}{\partial x} N_x + K_y \frac{\partial G}{\partial y} N_y \end{cases}$$

对方程(2)应用 Green 第二公式

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} G(P, Q) \left( K_x \frac{\partial^2 h(P)}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h(P)}{\partial y^2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} G(P, Q) \sum_{i=1}^{NP} W_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S_c \cdot G(P, Q) \cdot \frac{\partial h(P)}{\partial t} d\Omega \end{aligned}$$

整理为:

$$\begin{aligned} & -C(P)h(P) + \int_{\Gamma} G(P, Q)q(P) - h(P)G^*(P, Q)d\Gamma_Q + \sum_{i=1}^{NP} W_i G(P, R_i) \\ &= \int_{\Omega} S_c \cdot G(P, Q) \cdot \frac{\partial h(P)}{\partial t} d\Omega \quad (4) \end{aligned}$$

其中  $C(P)$  是常数, 其数值由点  $P$  的位置决定。

由于前面我们采用的是不依赖于时间的基本解, 为了对时间偏导数项进行离散, 我们用分离变量法将时间偏导项进行变量分离, 我们不妨取  $M$  个参考点。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{j=1}^M f_j(r) \beta_j(t) \quad (5)$$

其中  $\beta$  是关于时间的未知数,  $f_j(r)$  是一组坐标函数, 为了简便起见, 本文令

$$f_j(r) = r_j = \sqrt{\frac{(x_Q - x_P)^2}{K_x} + \frac{(y_Q - y_P)^2}{K_y}}$$

将式(5)代入方程(4)

$$\begin{aligned} & -C(P) + \int_{\Gamma} [G(P, Q)q(P) - G^*(P, Q)h(P)]d\Gamma_Q + \sum_{i=1}^{NP} W_i G(P, R_i) \\ & = \int_{\Omega} S_c G(P, Q) \sum_{j=1}^M f_j(r) \beta_j(t) d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

为了避免区域上进行积分，我们将把区域上的积分再次转化为边界积分。在考虑坐标函数选取时，我们要求存在着一个函数  $\varphi, j=1, 2, \dots, M$  使得

$$\nabla^2 \varphi = f_j(r) \quad (7)$$

将方程(7)代入(6)，整理为：

$$\begin{aligned} & -C(P)h(P) + \int_{\Gamma} [G(P, Q)q(P) - G^*(P, Q)h(P)]d\Gamma_Q + \sum_{i=1}^{NP} W_i G(P, R_i) \\ & = S_c \sum_{j=1}^M \beta_j(t) [-C(P)\varphi(P, Q) + \int_{\Gamma} [G(P, Q)\eta(Q, Q_i) - \\ & G^*(P, Q)\varphi(Q, Q_i)]d\Gamma_Q] \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\eta = K_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} N_x + K_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} N_y$$

方程(5)的矩阵形式

$$\left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} = F_{M \times M} \beta$$

因此

$$\beta = F^{-1} \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} \quad (5)'$$

利用配置法对方程(8)进行离散，可得

$$\begin{aligned} & -C_i h_i + \sum_{k=1}^N \left[ \int_{\Gamma_k} G(P_i, Q) d\Gamma_Q \right] q_k - \sum_{k=1}^N \left[ \int_{\Gamma_k} G^*(P_i, Q) d\Gamma_Q \right] h_k + \sum_{i=1}^{NP} W_i G(P_i, R_i) = \\ & S_c \sum_{j=1}^M \beta_j(t) \left[ -C_i \varphi^i + \sum_{k=1}^N \left[ \int_{\Gamma_k} G(P_i, Q) d\Gamma_Q \right] \eta^k - \sum_{k=1}^N \left[ \int_{\Gamma_k} G^*(P_i, Q) d\Gamma_Q \right] \varphi^k \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$g_k = \int_{\Gamma_k} G(P_i, Q) d\Gamma_Q, H_k = \int_{\Gamma_k} G^*(P_i, Q) d\Gamma_Q$$

式(9)可整理为：

$$\begin{aligned} & -C_i h_i + \sum_{k=1}^N g_k q_k - \sum_{k=1}^N H_k h_k + \sum_{i=1}^{NP} W_i G(P, R_i) = \\ & S_c \sum_{j=1}^M \beta_j(t) \left[ -C_i \varphi^i + \sum_{k=1}^N g_k \eta^k - \sum_{k=1}^N H_k \varphi^k \right] \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)的矩阵形式为

$$\begin{matrix} -C & U & + & g & Q & - & H & \cdot & U & + & T \\ M \times M & M \times 1 & M \times N & N \times 1 & M \times N & N \times 1 & M \times N & \cdot & M \times 1 & M \times 1 & \end{matrix} = S_c \begin{matrix} -C & \varphi & + & g & \eta & - & H & \varphi \\ M \times M & M \times M & M \times N & N \times M & M \times N & N \times M & M \times N & N \times M \end{matrix} \beta \quad (11)$$

将(5)'代入(11)式可得

$$-CU + gQ - HU + T = S_2(-C\varphi + g\eta - H\varphi)F^{-1} \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} \quad (11)'$$

我们令

$$S_2(-C\varphi + g\eta - H\varphi)F^{-1} = R$$

式(11)'可写为

$$-CU - HU + gQ + T = R \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} \quad (12)$$

对式(12)中的项对时间进行差分

$$\begin{aligned} CU &= C[\theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n] \\ HU &= H[\theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n] \\ gQ &= g[\theta Q^{n+1} + (1-\theta)Q^n] \end{aligned} \quad (13)$$

将式(13)代入(12)( $\theta = 1$ )进行整理可得

$$R\{h^{n+1}\} + \Delta t CU^{n+1} - \Delta t g Q^{n+1} + \Delta t HU^{n+1} = R\{h^n\} + \Delta t T \quad (14)$$

对式(14)进行整理可得形如

$$AX = B$$

的矩阵方程,解此矩阵方程可得  $N+1$  时刻未知位势和通量的值。上述方法的技术特点是:在对时间偏导项处理上,将时间偏导项分解为坐标函数和与时间有关变量的乘积形式,利用不带时间变量的基本解和 Green 公式推导出边界积分方程,形成只对空间积分的椭圆算子。为了避免计算体积分,我们再次应用了 Green 公式最终得到的表达式只有边界积分。从而达到了只对边界进行离散的目的。当  $M = N$  时,我们仅仅取边界点做参考点,当参考点数  $M$  大于边界单元数,这样把一些内点也考虑进去,在计算过程中将边界值与内点值一起考虑求解,方程的系数矩阵无疑扩大了。在多介质问题中,本来多介质问题的矩阵方程比较大,如果把一些内点在计算中也考虑进去,系统矩阵方程无疑更庞大。为了避免此种情况的出现,笔者对这种计算进行研究,提出一种解决思路。在计算中我们首先只考虑边界点,使  $M = N$ ,形成系统矩阵方程,求出某一时间的位势和通量的值,然后再考虑内点使  $M$  等于内点的个数,利用已求出的该时间的边界值再次形成矩阵方程可求出相应时间的内点值。这种思路的优点是:(1)避免了解庞大的系统矩阵方程,可适用于边界较多单元,介质较多情况;(2)避免边界点与内点一起求解情况。缺点是在每一时间要进行两次组装系统矩阵方程和求解矩阵方程。这种思路在综合比较考虑情况下还是有许多计算优势,比较适合用于大规模矩阵方程计算,在一些具体问题中可灵活运用。

## 2 算例

例 1 考察一个  $3 \times 3$  m 正方形区域,初时温度  $U_0 = 30^\circ\text{C}$ ,热传导系数  $K = 1.25 \text{ Btu}/(\text{h} \cdot \text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ ,对于任意时间  $t > t_0$ ,边界均满足 Dirichlet 条件,且沿边界  $U$  值为零,考虑此温度场随时间变化情况。

对边界进行边界单元划分,共 32 个边界单元,内点取 50 个,输入有关数据,当取

$\Delta t = 0.1 \text{ h}$ ,  $t = 1.2 \text{ h}$  时, 此时所得计算结果与理论解析值比较如下

$x$	$y$	Numerical Solution	Analytical Solution
0.3	0.3	$\cdot 1\ 809\ 103E + 01$	1.639
0.6	0.6	$\cdot 1\ 407\ 325E + 01$	1.186
0.9	0.9	$\cdot 7\ 379\ 191E + 00$	0.626
1.2	1.2	$\cdot 2\ 004\ 718E + 00$	0.173

取  $\Delta t = 0.5 \text{ h}$ , 在  $t = 1.2 \text{ h}$  时, 计算结果与解析值相比较如下:

$x$	$y$	Numerical Solution	Analytical Solution
0.3	0.3	$\cdot 1\ 809\ 103E + 01$	1.639
0.6	0.6	$\cdot 1\ 407\ 325E + 01$	1.186
0.9	0.9	$\cdot 7\ 291\ 079E + 00$	0.626
1.2	1.2	$\cdot 2\ 004\ 718E + 00$	0.173

例 2 这是一个长为 20, 宽为 30 的长方形渗流场, 上下两边界为不透水层  $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$ , 左边水头  $H = 40$ , 右边水头  $H = 0$ , 水平方向渗透系数  $K_x = 1.0$ , 垂直方向渗透系数  $K_y = 1.0$ 。

将边界划分为 10 个常数单元, 内部点取 41 个。计算得到的速度向量场图如下:

### 3 主要结论

1) 除一般边界元法进行边界单元划分外, 本文采用唯边界与二次积分法处理时间偏导项, 避免了区域划分与区域积分, 且内点的选取具有任意性, 可根据计算需要选择必要的参考点。

2) 对于含源(漏)问题, 由于避免了区域网格划分, 只选取源(漏)点, 不必考虑由于源(漏)点而产生的奇异性, 源(漏)量的选取值可适当调整, 而有限元程序对源(漏)的处理较复杂。

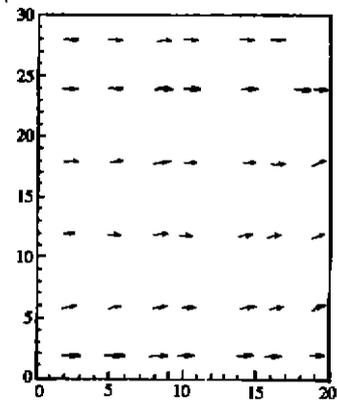


图 1

### 参 考 文 献

- 1 张有天, 王 镭, 陈 平. 边界元方法及其在工程中的应用. 北京: 水利水电出版社, 1989
- 2 Mustafa, M. Aral. and Yi Tang. A Boundary Only Procedure for Time-dependent Diffusion Equations. AP-PL. Math. Modelling, 1998, Vol. 12
- 3 Liggett, J. A and Liu, P. L-F, The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow, Allen & Unwin, London, 1983
- 4 Brebbia, C. A. The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, 1978
- 5 Brebbia, C. A, & Walker, S. Boundary Element Techniques in Engineering, Butterworth, 1979
- 6 Brebbia, C. A, Telles, J. C. F & Wrobel, L. C. Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering, Springer, Verlag 1984

- 7 钱孝星. 水文地质计算. 水利电力出版社, 1995
- 8 D. Nardini & C. A. Brebbia, The Solution of Parabolic and Hyperbolic Problems Using an Alternative Boundary Element Formulation, *Boundary Element* 7, 1986
- 9 Akpofure Taigbenu and James. A. Liggett, An Integral Formulation Applied to the Diffusion and Boussinesq Equation. *Int Journal for Num Math in Engin*, 1986, Vol. 23: 1057 ~ 1079

## Boundary Element Method for Anisotropic – Orthotropic Unsteady Seepage Flow

*Cao Junsheng*

(Shanghai University of Technology, 200093)

*Li Kaihai    Zhu Jialin*

(Dept. of Natural Science, Chongqing Jianzhu University, 400045)

**Abstract** It is an important subject to solve numerically the problems of anisotropic unsteady seepage flow. This paper presents a numerical method for computing the anisotropic-orthotropic unsteady seepage flow with BEM. The paper introduces the so-called boundary-only technique to solve time dependent problem. The Volume domain integral is voided by using the Green formula again. Several numerical examples are presented.

**Key Words** Boundary element method, seepage, anisotropic