

文章编号:1006-7329(2000)04-0071-05

# 薄壁构件二阶分析的新方法

14  
71-75

刘 坚, 李开禧  
(重庆建筑大学 建工学院, 重庆 400045)

TU330.1

**摘要:**根据截面绕定轴转动理论建立的空间稳定校核方法,用实例说明这种以二阶应力为依据的验算方法,概念清楚,计算简捷明了。

**关键词:**薄壁构件; 定轴转动理论; 二阶分析

中图分类号: TU33

文献标识码: A

## 1 截面绕定轴转动理论的空间稳定验算方法

截面绕定轴转动理论是李开禧教授提出的。该理论把薄壁构件的弯曲变形理解为截面正投影的“平移”;把构件的扭转变形理解为截面正投影绕弯心的“转动”;当两种变形同时存在时,则正投影可迭加为绕某一定点的转动,该点称为转动中心。为找到这个转动中心,在绕定轴转动理论中,巧妙地设计了两个新工具:弯矩矢量和转角向径,使构件上内、外纵向力系平衡关系简化为各板中线上内、外弯矩矢量的互等关系,各板中线相交处的纵向位移协调条件凝聚成转角向径汇交于同一点的条件。以新的平衡方程组为基础,引入顺周边方向依次消元的技巧,很容易地定出相邻两板的中性轴,过两板中线交点作该中性轴的平行线,两平行线的交点即转角向径的极点,也是全截面正投影的转动中心。令各转角向径等于相应板中线的纵向转角,由已知转角值和中性轴的位置可绘出截面上各点的纵向位移图,这个图不仅和截面形状有关,而且和加载方式有关,由于它实质上是表示单位变形时截面上正应力的分布形状,所以称为动态坐标。动态坐标的功能包含了主座标、扇形座标的功能,换句话说,主座标、扇形座标只是动态座标在指定加载条件下的特例,而动态坐标又比这两个坐标系简单,这也是新理论能发挥效益的原因。

外加纵向力系对单位翘曲变形所作的功等于外力与其作用点处的动态坐标值的乘积,当某板中线上作用外弯矩矢量,应等于弯矩矢量与该板中线的纵向转角的乘积,因截面发生单位翘曲变形时,截面的转角就等于转角向径,所以外弯矩矢量所作的功,实际上是该弯矩矢量对转动中心之矩,它与约束扭转理论中双力矩的含义不同,因为力矩和力偶两者的定义不同,为了区别两者,外双力矩用加注角标  $K$  的符号  $B_K$  表示。为了避免陌生术语,在截面绕定转动理论中仍称它为双力矩。

内双力矩定义为由变形所产生的正应力对单位翘曲变形所作的功,若截面绕  $K$  点转角的二阶导数用  $\beta_K''$  表示,则内双力矩  $B_K^i = EI_{\omega K} \beta_K''$ , 其中  $I_{\omega K} = \int_A \omega_K^2 dA$ ,  $I_{\omega K}$  为动态座标  $\omega_K$  的自乘积分,但仍在泛义上称  $EI_{\omega K}$  为翘曲惯性。在绘出  $\omega_K$  之后,用图乘法容易求出  $I_{\omega K}$ 。同时也习惯地称  $EI_{\omega K}$  为翘曲刚度,但这里的“翘曲”,已经是在泛义上的概念了。

按虚功原理,可导出截面上内、外双力矩相等,即:

$$B_K^i = EI_{\omega K} \beta_K'', \beta_K'' = \frac{B_K^e}{EI_{\omega K}} \quad (1)$$

如图 1 所示的构件,在左侧翼缘板中线平面内作用按正弦函数分布的荷载  $q$  时,在该板中线平面内的弯矩量沿杆长按正弦函数分布,跨中截面的弯矩矢量为  $M_m$ , 双力矩  $B_{mK} = M_m r_1$ ,  $r_1$  为该板中

• 收稿日期:2000-06-01

作者简介:刘 坚(1964-),男,湖南邵阳人,博士生,主要从事钢结构稳定研究。

线到转动中心  $K$  的距离,当截面绕  $K$  点的纵向轴线转动时,若令跨中截面的转角为  $\beta_{km}$ ,则根据式(1)和两端铰结的支承条件可得:

$$\beta_{km} = \frac{B_{km} \cdot l^2}{\pi^2 EI_{out}} = \frac{B_{km}}{B_{Ek}}$$

其中,

$$B_{Ek} = \frac{\pi^2 EI_{out}}{l^2}; \quad B_{Ek} = \frac{B_{km}}{\beta_{km}} \quad (2)$$

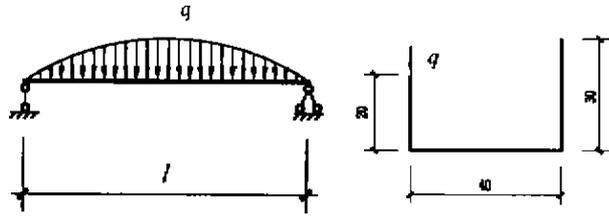


图1 正弦函数分布荷载下的薄壁构件

$B_{Ek}$ 是跨中截面产生单位转角时所需要的大力矩,它是表达构件转动刚度的力学量,也是二阶分析中,组成变形放大系数的重要参数。

按绕定轴转动理论分析构件的二阶效应是很有效的,它的主要内容有:1)用一组内、外弯矩矢量表示跨中截面上内、外纵向力系的平衡关系,提供了“眼见为实”的客观环境。2)内弯矩矢量是由翘曲刚度组成的大力矩  $EI_{out}\beta_{km}$ 和自由扭转刚度组成的附加大力矩  $GI_k\beta_{km}$ ;外弯矩矢量由集中力作用点  $n$  在垂直于联线  $kn$  的位移产生的大力矩  $Pe_k^2$  ( $e_k$  为联线  $kn$  的长度),以及由截面绕  $n$  点转动而形成的附加大力矩  $PK_n\beta_{km}$ ,其中  $K_n = \int_A \bar{\sigma} r_n^2 dA$ ,  $\bar{\sigma}$  为  $P=1$  时的一阶应力,  $r_n$  是以  $n$  为极点的向径。显然,有了绘制一阶应力图的基础,这项积分易按图乘法算出。这样,内、外力系都简化为各自两项的简单力系,而且计算与弯心无关,计算简单,特别是用值  $K_n$  表达 *Wargner* 效应,能更确切地解释为集中力分散后,截面绕作用点转动时产生的大力矩效应。3)把平衡方程改造成待定的转动中心坐标和未知临界力组成的方程组,从而揭示出转动中心之间的共轭关系,即它们既是自身屈曲模态的转动中心,又是相互正交屈曲模态的附加弯矩矢量作用点。在三维问题中,三个转动中心和三个附加弯矩矢量组成的三角形,可以十分巧妙地描绘出空间失稳时的力学反应和变形行为。4)把构件的空间稳定问题,统一地表达为泛义上的大力矩达到临界值,并导出临界大力矩的统一算式,统一算式可以把面内弯曲失稳的临界力视为特列,而且表明,即使弯曲刚度无穷大,构件也存在绕弯心翘曲扭转失稳的可能,这项结论具有重要的工程应用价值。5)绘制附加弯矩三角形的意图是把空间稳定问题分解为三个切向平面内的稳定问题,它们各自绕三根不同的纵向轴线转动,而且是相互独立的。但是在第二类稳定问题中,每一个临界大力矩只是表达绕该轴线的刚度,如把一阶变形分解为绕同样三个纵向轴线转动的初始变形,则各自按自身放大系数修正,求出三个相互独立的二阶应力再和原有的一阶应力迭加,可以作为判断稳定承载力的依据。上述原理虽然在文献[1]、[2]、[3]等中作了论述,但由于概念新颖,篇幅限制,仍有不少需进一步阐明之处。下面以窄矩形截面柱,在偏心压力  $P$  作用下侧向稳定问题进行讨论。

按图2中已标注的符号,当杆端侧向支承为铰结时,把现行理论中的侧向弯矩平衡方程和扭矩平衡方程,改写成以下两式

$$P_{Ex}v = Pv + Pe\beta$$

$$B_{Ex}\beta = Pr_0^2\beta + Pev$$

式中,  $P_{Ex} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}$ ,  $B_{Ex} = GI_k$ ,  $EI_x, GI_k$  为截面对  $x$  轴的弯曲刚度和自由扭转刚度,  $v, \beta$  为截面弯心处的侧移和该点的扭角,  $l, e$  为杆长和荷载偏心距,  $r_0$  为极回转半径。

设转动中心距弯心的距离为  $r_k$ ,按  $v = r_k\beta$ ,代入以上两式,并消去  $\beta$  后得:

$$P_{Ex} \cdot r_k = P(r_k + e) \quad (3)$$

$$B_{Ex} = P(r_0^2 + r_k e) \quad (4)$$

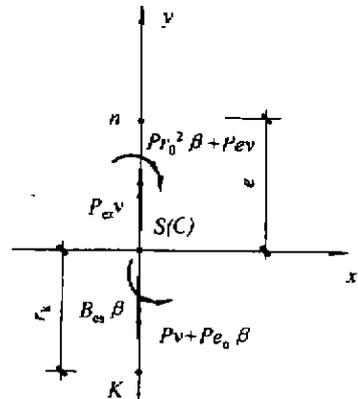


图2 弯矩矢量表示的内、外力系示意图

(3)、(4)式左、右两端分别为截面绕  $K$  点转动单位转角时附加的内、外弯矩矢量和内、外双力矩,同时也是以转动中心坐标  $r_k$  和临界力  $P$  为未知量的方程。

当内、外力系平衡时,根据内、外弯矩矢量应该等值、共线的条件有:

$$\frac{B_{Ez}}{P_{Ez}r_k} = \frac{r_0^2 + r_k e}{r_k + e} \quad (5)$$

再令  $B_{Ez}/P_{Ez} = r_s^2$ , 则上式(5)可写为:

$$r_k^2 + \frac{1}{e}(r_0^2 - r_s^2)r_k - r_s^2 = 0 \quad (6)$$

求出(6)式的两个根  $r_{k1}, r_{k2}$ , 由一元二次方程根的特征有  $r_{k1} \cdot r_{k2} = -r_s^2$ , 或者  $r_{k2} = -r_s^2/r_{k1}$ , 与(5)式相比可知,  $r_{k2}$  又可理解为截面绕坐标为  $r_{k1}$  的  $K_1$  点转动时, 附加弯矩矢量  $P_{Ez}r_{k1}$  作用线到弯心的距离, 反之, 当截面绕坐标  $r_{k2}$  的  $K_2$  点转动时, 附加弯矩矢量  $P_{Ez}r_{k2}$  的臂长也一定为  $r_{k1}$ 。也就是说转动中心  $K_1, K_2$  具有双重含义: 每一点既是这一屈曲模态的转动中心, 又是相正交的另一屈曲模态附加弯矩矢量的作用点, 可见两者具有共轭关系。

由(6)式可得  $r_k$  与  $e$  的关系式为:

$$e = \frac{(r_0^2 - r_s^2)r_k}{r_s^2 - r_k^2} \quad (7)$$

当  $r_k=0$  时,  $e=0$ 。由(6)式可知,  $B_{Ez} = Pr_0^2$ ; 当  $r_k=r_s$  时,  $e$  趋近于无穷大, 只有力  $P$  趋于无穷小,  $Pe$  趋于常数  $M$ , 才能按(3)、(4)两式求得  $M = P_{Ez} \cdot r_s$ ; 当  $r_k=r_0$  时,  $e=-r_k=-r_0$ , 代入(3)、(4)两式右端括号内的值均等于 0, 这时只有  $P$  趋于无穷大才不致使构件失稳。

把(3)式两边同乘以  $r_k$ , 然后和(4)式相加得:

$$P_{Ez} \cdot r_k^2 + B_{Ez} = P(e_k^2 + (r_0^2 - e^2)) \quad (8)$$

其中  $e_k = r_k + e$ ,  $e_k$  为力  $P$  作用点到转动中心的距离;  $Pe_k^2$  为截面转动单位转角时, 由于力  $P$  侧移后附加弯矩矢量对  $K$  点之矩;  $P(r_0^2 - e^2)$  则为截面转动时, 集中力  $P$  已分散成作用于截面上各点的正应力, 它们再产生的“矩偶”可用下式计算:

$$\begin{cases} \int_A \sigma(e-x)dA = \int_A \left( \frac{P}{A} + \frac{Pex}{I_y} \right) (e-x)dA = 0 \\ \int_A \sigma(e-x)^2 dA = \int_A \left( \frac{P}{A} + \frac{Pex}{I_y} \right) (e-x)^2 dA = P(r_0^2 - e^2) \end{cases}$$

这里, 把外力产生的附加双力矩记为  $B_k^e = Pe_k^2 + Pk_n$ , 令  $r_n^2 = e_k^2 + K_n$  则  $B_k^e = Pr_n^2$ , 那么构件变形后, 在新位置上平衡时, 内、外附加双力矩相等, 即  $\frac{\pi^2 EI_{oz}}{l^2} + GI_k = Pr_n^2$ ; 由于  $r_n^2$  可正, 可负或趋于零, 才出现  $P$  力可正、可负, 或趋于无穷大的情况, 但正如我们不能把弯矩只视为轴力无穷小, 不顾臂长无穷大的综合效应一样, 附加双力矩也不能把力和臂长分开看。

在该理论中, 强调二阶分析的起点是同时计入  $Pr_n^2, GI_k$  的正, 反两方面的作用, 在二阶分析中采用的修正系数

$$\eta = \frac{1}{1 - L/L_{cr}}$$

其中,

$$L = Pr_n^2 - GI_k, \quad L_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{oz}}{l^2}$$

就一般情况而言, 二阶应力分析计算的步骤如下:

1) 按下列方程式计算  $\alpha_x, \alpha_y$ :

$$\begin{cases} \frac{\alpha_y a_x^2}{1 - \alpha_y/n_x} + \frac{\alpha_x a_y^2}{1 - \alpha_x} = (n_w - \alpha_y n_k) \\ \alpha_x = \frac{1}{n_x} \alpha_y \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $\alpha_y = \frac{P}{P_{Ey}}, P_{Ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{l_{0y}^2}, n_x = \frac{I_x}{I_y}, n_w = \frac{I_w}{I_y H^2}, n_k = \frac{K_n}{H^2}, a_x = \frac{e_x - x_0}{H}, \alpha_y = \frac{e_y - y_0}{H}$

$I_x, I_y, I_{\omega}, I_k$  分别为截面对  $x, y$  轴的惯性矩、翘曲惯矩、扭转常数;  $e_x, e_y$  为力  $P$  的偏心距,  $x_0, y_0$  为弯心与形心的相对坐标,  $H$  为截面高度,  $l_{\omega}$  为构件在  $y$  方向计算长度, 式(9)是关于  $\alpha_i$  的一元三次方程, 是根据内、外弯矩矢量等值与反向条件导出的。

2) 计算三个转动中心  $k_i (i=1, 2, 3)$  的坐标  $K_i (r_{k_i x}, r_{k_i y}) (i=1, 2, 3)$

根据(9)式求出的  $\alpha_x, \alpha_y (i=1, 2, 3)$ , 可以求出转动中心的坐标。

$$\begin{cases} r_{k_i x} = \frac{\alpha_x \alpha_x H}{1 - \alpha_x} \\ r_{k_i y} = \frac{\alpha_y \alpha_y H}{1 - \alpha_y} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

3) 求动态坐标  $\omega_k^i$ , 广义翘曲惯矩  $I_{\omega k}$ 。

4) 求二阶应力的修正系数  $\eta$ 。

5) 求截面的二阶应力  $\sigma_k^i = \frac{P r_k^2 \eta \cdot \beta_{km}}{I_{\omega k}} \cdot \omega_k^i$ 。

## 2 算例

本例是上翼缘为  $200 \times 10$  mm, 下翼缘  $300 \times 10$  mm, 腹板为  $400 \times 10$  mm 的双轴不对称槽形截面, 弯心  $S$  与形心  $C$  不重合, 见图 3, 偏心荷载  $P$  作用在截面上  $n$  点处。为节省篇幅, 本例仅给出该截面偏压杆的三转动中心和动态坐标  $\omega_k^i$ , 因为这是用新方法求薄壁构件二阶应力的关键部分。已知截面的几何特征:  $I_x = 25\ 568.7\ \text{cm}^4, I_y = 6\ 292.4\ \text{cm}^4, I_{\omega} = 1.432\ 05 \times 10^6\ \text{cm}^6, I_k = 30.0\ \text{cm}^4, A = 90\ \text{cm}^2, \alpha_x = 0.84, \alpha_y = 0.565$ 。另求得  $P_{E_x} = 8\ 122.57\ \text{kN}, P_{E_y} = 1\ 998.96\ \text{kN}, P_{\omega} = 1\ 064.8\ \text{kN}, k_n = 100/9\ \text{cm}^2$ , 通过求解上述一元三次方程(9)式, 再根据上述(10)式, 求得该截面的三转动中心坐标  $K_1 (-1.12, -3.41)$  cm,  $K_2 (-16.53, 89.07)$  cm,  $K_3 (33.31, 22.50)$  cm, 如图 3 所示, 另求得动态坐标图, 如图 4 所示。

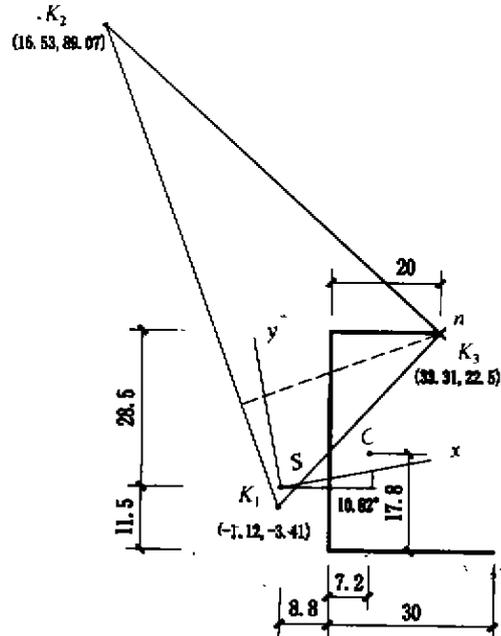


图 3 槽形截面的三转动中心

## 3 结 语

由于现行计算理论不够完善, 在二阶分析中表现尤为突出, 近年来, 薄壁结构的应用日益广泛, 工程事故也不少见, 有的是因为没有认识到扭转失稳的道理所致, 目前, 仍缺少适用于工程的实用计算理论, 本文根据绕定轴理论建立的空间稳定计算方法, 用实例说明了这种新方法容易被人们理解, 概念清楚, 计算简便易行。

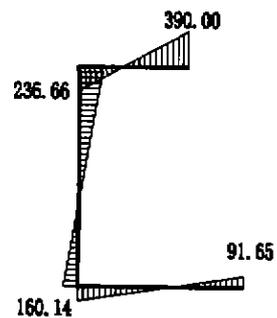


图 4 动态坐标图 ( $\omega_k^i$ ) 图

## 参考文献:

[1] 李开禧. 弹性薄壁杆件的翘曲理论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1990  
 [2] 李开禧, 等. 对修改钢结构设计规范的建议[M]. 钢结构工程研究. 北京: 中国计划出版社, 1998, (2): 189~

194

- [3] 李开禧,刘坚,等. 钢结构稳定计算理论的新探索[J]. 结构工程师. 上海:同济大学出版社,2000(总第53期增刊):572~591

## A New Method of Second—Order Analysis of Thin-wall Member

LIU Jian, LI Kai-xi

(Faculty of Civil Engineering, Chongqing Jianzhu University, Chongqing 400045, China)

**Abstract:** In this paper, based on the theory of the rotation of a cross section around a fixed axis, a new calculation method of second—order stress of space stability for thin wall member is applied. The example given in this paper shows that the conception of this new method of second order analysis is clear and the calculation procedure is concise.

**Keywords:** thin-wall member; theory of the rotation around a fixed axis; second-order analysis

---

(上接第60页)

### 参考文献:

- [1] Launder B E, Spalding D B. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering[J]. 1974,13(3):269~289
- [2] Murakami, S. and S. Kato. Numerical and experimental study on room airflow—3-D predictions using the  $K-\epsilon$  model[J]. Building and Environment, 1991, 24(1):85~97
- [3] Foluso Ladeinde, et al. CFD Applications in the HVAC&R Industry[J]. ASHRAE Journal, 1997, (1):44~48
- [4] 陈材侃. 计算流体力学[M]. 重庆:重庆出版社, 1992
- [5] O'Connor, L. Computational Fluid Dynamics; Giving a Boost to Engine Design[J]. Mechanical Engineering, 1992, 114(5):44~50

## The Optimization Design to Ventilation of Underground Main Workshop in a Hydropower Station

LONG Tian-yu, CAI Zeng-ji, DONG Hong-ming

(Faculty of Urban Construction, Chongqing Jianzhu University, Chongqing 400045, China)

**Abstract:** Using three-dimensional  $K-\epsilon$  turbulent model, the optimal version of ventilation form of the underground main workshop in a hydropower station has been designed by means of numerical analysis. In order to verify the validity of numerical modeling, the model test has been done. The results of model test and numerical analysis are basically identical.

**Keywords:** indoor flow; numerical analysis; optimization design