

文章编号:1006-7329(2001)04-0119-04

用斜投影法解决相交的几个问题*

郑海兰

(重庆大学C区,重庆 400030)

摘要:运用斜投影法解决直线与平面、直线与锥面、平面与斜棱锥、平面与椭圆柱、正圆锥与椭圆柱等相交,求交点、交线的作图问题。

关键词:斜投影;投射方向;交点;交线

中图分类号:TB23

文献标识码:A

在画法几何学中,基本的投影方法有两种,中心投影法与平行投影法。平行投影法又分为正投影法和斜投影法两种。在多面正投影中,我们通常采用正投影法,斜投影法不常用,但是如果已知几何元素的多面正投影,用斜投影法辅助作图,改变原有几何元素的投影特性,能使一些求交点、交线的问题的图解变得比较容易。

1 斜投影的基本作图

1.1 点的斜投影

已知点的正投影,选定斜投影的投射方向为 L 时,可以作出空间点在投影面的斜投影,作图方法如下(图1):

过 a' 作 l' 的平行线交 X 轴于1点,过 a 作 l 的平行线交 X 轴于2点,过1点作 X 轴的垂线交 $2a$ 于 a_1 ,得到 A 点在水平投影面上的斜投影。过2点作 X 轴的垂线交 $1a$ 的延长线于 a_2 ,得到 A 点在正立投影面上的斜投影。以同样的方法也可作出 A 点在侧立投影面的斜投影 a_3 (图中未画出)。

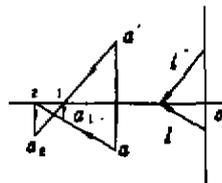


图1 点的斜投影

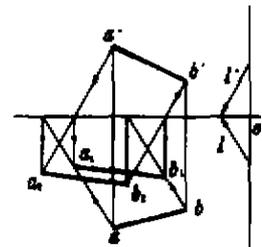


图2 直线的斜投影

1.2 直线的斜投影

已知直线的正面投影,要作出它在投影面上的斜投影,只要作出直线上两点的斜投影后,将点的同面投影相连即得。如图2,通过直线 AB 上点 A 和点 B 作沿 L 方向的斜投影,投射线与水平投影面的交点为 a_1 和 b_1 ,与正立投影面的交点为 a_2 和 b_2 ,连接 $a_1, b_1, a_2, b_2, a_1b_1$ 是直线 AB 沿 L 方向在水平投影面的斜投影, a_2b_2 是直线 AB 沿 L 方向在正立投影面的斜投影。

2 几个相交问题的图解

应用斜投影法解决相交问题时,以原投影面或与原投影面平行的平面作为斜投影面,如果能使一般位置的直线、平面或者直纹曲面斜投影有积聚性,图解就比较容易。根据几何元素相对于投影面的位置,以及它们之间的相对位置选择斜投影的投射线是图解的关键,作图时可根据具体情况分析确定。下面举例分析。

* 收稿日期:2001-02-28

作者简介:郑海兰(1956-),女,福建龙海人,讲师,主要从事工程制图研究。

2.1 一般位置的直线与平面相交(图3)

分析:直线和平面相对投影面处于一般位置。以水平投影面为斜投影面,要使直线或平面的投影具有积聚性,斜投影的投射射线有两种选择,一是投射射线与直线EF平行,平面 $\triangle ABC$ 斜投影后仍为平面,直线的投影积聚为一点,积聚点在平面内,是平面与直线的交点,利用点的从属性返投影线方向求出其交点。二是选投射射线与 $\triangle ABC$ 的一边AC平行,则 $\triangle ABC$ 的斜投影为直线,直线EF的斜投影仍为直线,其两直线的交点是平面与直线的共同点,找出两直线的交点返逆投影线方向即得所求。两种投射射线方向的选择都能使作图比较简单。下面仅说明第二种选择的作图过程,另一种就不在累赘。

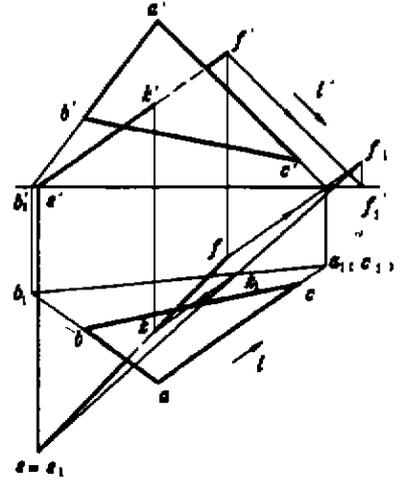


图3 直线与平面相交

作图步骤:①选择斜投影的投射射线方向为L,且 $L \parallel AC$;②作直线EF的斜投影得到 e_1f_1 ;③作AC的斜投影得到 $a_1(c_1)$,作B的斜投影得到 b_1 ,连接 $a_1(c_1)b_1$ 得到 $\triangle ABC$ 的斜投影;④找出 a_1b_1 与 e_1f_1 的交点 k_1 ,返逆投射射线求出 k, k' 即为所求;⑤判断其可见性如图。

2.2 直线与椭圆锥面相交(图4)

分析:从图中看出锥底平面与H面重合,直线处于一般位置。如果能使直线的斜投影积聚为一点,那么直线与锥体的贯穿点就与该点重合,通过贯穿点和锥顶,就比较容易找出属于锥面上的两条素线以及素线与直线的交点。以锥底平面为斜投影面,可选投射射线与直线AB平行。在锥底平面上,锥顶S沿投射射线方向投影得到 s_1 ,锥底斜投影为自身,自 s_1 点作锥底的切线,即得锥面的斜投影(图中只作锥顶的投影,未作锥面),直线的斜投影积聚为一点 $a_1(b_1)$,此点也是直线与锥面的交点的投影。作 s_1 和 $a_1(b_1)$ 作属于锥面上的两条素线,返逆投射射线可求出交点。

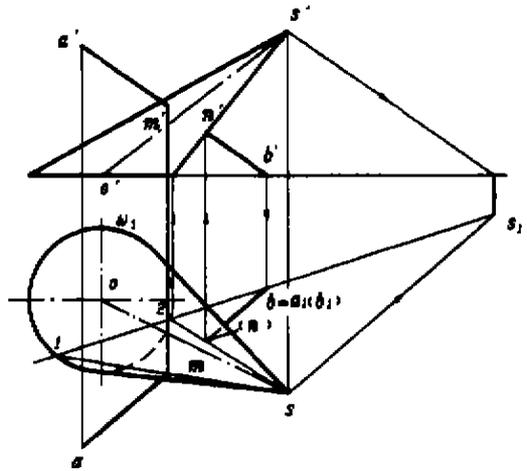


图4 直线与椭圆锥相交

作图步骤:①选择斜投影的投射射线方向为L,且 $L \parallel AB$;②作直线AB的斜投影得到 $a_1(b_1) \equiv b$;③作S的斜投影得到 s_1 ,作锥底的斜投影得到 ω_1 ;④连接 s_1b ,并延长交 ω_1 于1,2两点,连接 $1s, 2s$,找出 $1s, 2s$ 与 ab 的交点 m, n 以及对应点 m', n' ;⑤判断其可见性,完成作图。

2.3 平面与棱锥相交(图5)

分析:从图中看出棱锥底面与水平投影面重合,平面相对投影面处于一般位置。如果能使平面的斜投影积聚为直线,求解直线与棱锥棱线的交点,然后求截交线就比较容易。以锥底平面为斜投影面,选择投射射线与平面 $\triangle ABC$ 的AC边平行。在锥底面上,锥顶S沿AC方向投影得到 s_1 ,锥底斜投影为自身,将 s_1 与锥底多边形各顶点连接起来,即得棱锥的斜投影。平面 $\triangle ABC$ 的斜投影为直线,找出棱线与直线的交点,返逆投射射线找出对应点,判断其共有部分及可见性,作出其交线。

作图步骤:①选择斜投影的投射射线方向为L,且 $L \parallel AC$;②作S的斜投影得到 s_1 ,连接 $1s_1, 2s_1, 3s_1$,得到棱锥的斜投影;③作 $\triangle ABC$ 的斜投影得到 $a_1(c_1)b_1$;④找出 $1s_1, 2s_1, 3s_1$ 与 $a_1(c_1)b_1$ 的交点 i_1, j_1, k_1 。返逆投射射线找出对应点 $i, i'; j, j'; k, k'$;⑤连接 IJ, IK, JK ,确定平面与棱锥的共有部分的交线,并判断可见性如图。

2.4 平面与圆柱面相交(图6)

分析:椭圆柱面是直纹面,柱底与H面重合,平面相对投影面处于一般位置。以柱底平面为斜投影面。斜投影的投射射线可选与椭圆柱面轴线平行,也可选与平面 $\triangle ABC$ 内一条直线平行。投射射线与轴线平行时,柱面的斜投影积聚为圆周 ω_1 。平面 $\triangle ABC$ 的斜投影为 $\triangle a_1b_1c_1$, ω_1 与 $\triangle a_1b_1c_1$ 的共有部分即截交线的投影。其上的点既属于平面 $\triangle ABC$ 内的一条直线,也属于柱面上一条素线,返投射射线作出对应直线和素线,找出对应的交点,用同样的方法作出若干点,用平滑的曲线连接即成。这样选择投射射线方向,比较容易从积聚投影面上直观的判断出平面与柱面是否全贯,但作图时 $\triangle ABC$ 的斜投影重迭在柱底平面上,所作辅助线也重迭在原图上,使图面不够清晰,不便于作图找点。若选投射射线与平面 $\triangle ABC$ 中一条直线 AC 平行,将柱的轴线 OO_d 沿 AC 向柱底平面投影,得到 o_1o_d ,柱底的斜投影为其本身,即 ω_1 。作与 o_1o_d 的平行线且与 ω_1 相切的两条直线,得到柱斜投影的外轮廓线。平面 $\triangle ABC$ 在柱底平面的投影积聚为直线。直线与柱面相交部分是截交线的斜投影。返逆投射射线找出对应的素线以及素线上的对应点,用平滑的曲线连接即得所求截交线。这样选择投射射线,只需作出辅助素线,不需要在平面 $\triangle ABC$ 内作辅助线,辅助作图部分与原图重迭较少,图面较为清晰。下面着重说明作图过程。

作图步骤:①选择斜投影的投射射线方向为 L ,且 $L \parallel AC$;②作平面 $\triangle ABC$ 的斜投影得到 b_1c_1 (因 $a_1(c_1) \equiv c$)。作 O 的斜投影得到 o_1 ,连接 o_1o_d ;③作与 o_1o_d 平行且与 ω_1 相切的两条直线,两直线与 b_1c_1 相交于 m_1, n_1 两点。线段 m_1n_1 即为截交线的投影,返逆投射射线作出 m_1n_1 上的点所在素线,找出对应点。下面以任一点 K 说明对应点的作图。过 k_1 作 o_1o_d 平行线交 ω_1 于 k_d 。过 k_d 作 OO_d 平行线,过 k_1 作与 L 平行的直线,两平行线相交于 k ,然后找出其对应点 k' 。④以同样的方法找出若干个点,判断其可见性,用平滑的曲线连接起来即得所求截交线;

2.5 正圆锥与椭圆柱相交(轴线斜交)(图7)

分析:椭圆柱是直纹面,柱的端面与W面平行,如果能使椭圆柱的斜投影有积聚性,利用积聚投影求相贯线就比较容易。选择侧立投影面为斜投影面,斜投影的投射射线方向与柱的轴线平行。把椭圆柱和正圆锥沿投射射线的方向向侧立投影面作斜投影,柱面积聚为 ω_3 ,锥面斜投影的外形线为与锥相切的投射射线形成的平面与侧立投影面的交线,锥底为一椭圆(作图时不一定作出椭圆)。在正立投影面上过锥顶作若干条素线,在侧立面作对应素线的斜投影,并求出素线与 ω_3 的交点,返逆投射射线找出对应点,用平滑的曲线连接各点即得所求相贯线。

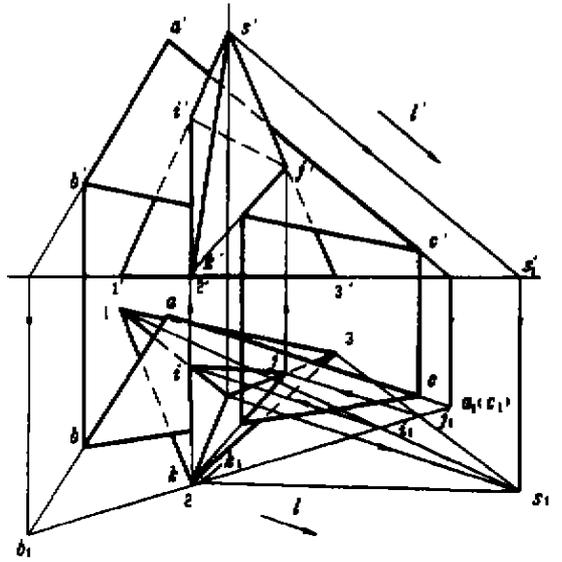


图5 平面与圆锥相交

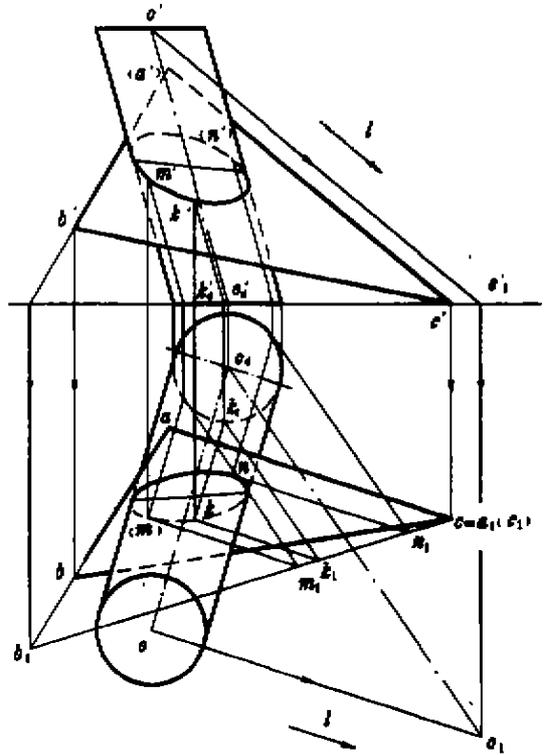


图6 平面与椭圆柱面柱交

作图步骤:

1) 选择斜投影的投射射线 L 与椭圆柱轴线平行。

2) 将柱面向侧立面投影得到圆 ω_3 。

3) 将 S, O 点向侧立面斜投影得到 s_3, o_3 , 连接 s_3o_3 。过 d' 点作锥面的内切球面 q' , 并将其向侧立面斜投影得到 q_3 。过 s_3 作 q_3 的切线, 得到锥面的斜投影。

4) 在正立投影面找出特殊点 a', b', c', d' , 如图所示。

5) 在侧立投影面找出最前素线上点 e_3, f_3 (最后素线上点与最前素线上点重合), 返逆投射射线找出对应点 e', f' 。

6) 作任一点的斜投影。在正立投影面中任作一素线 $s'k'$, 作出斜投影得到

s_3k_3, s_3k_3 与 ω_3 的交点 g_3, h_3 , 返逆投射射线找出 $s'k'$ 线上的对应点 g', h' 。用同样的方法找出其它各点, 用平滑的曲线连接起来即得。

从以上几个例子的分析, 可以看出, 选择斜投影的投射射线方向, 既要考虑几何元素本身的特点, 又要考虑相交几何元素之间的相对位置以及它们相对于投影面的位置, 其目的是为了使几何元素的投影具有积聚性, 以利于解题。以上各例也可以用其它方法解题, 此文仅仅是对用斜投影的方法解决一些典型相交问题的探讨。

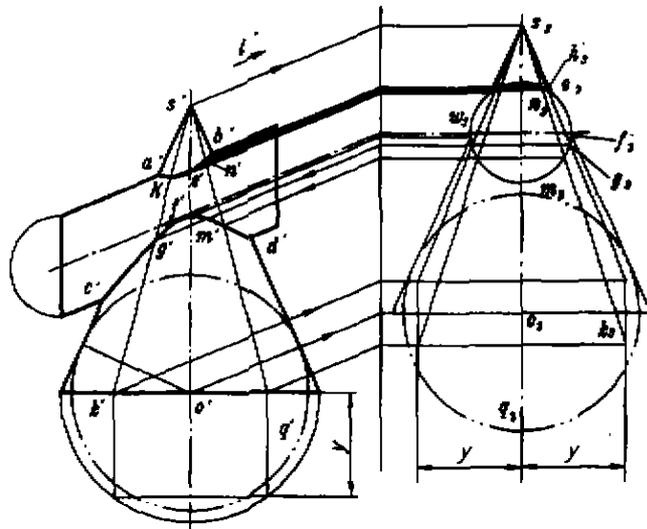


图7 正圆锥与椭圆柱相交

参考文献:

- [1] 朱福熙. 建筑制图(M). 北京: 高等教育出版社, 1992.
- [2] 艾运钧. 工程图学分析引论(M). 北京: 中国铁道出版社, 1984.

Some Problems in Solution of Intersection Points by Oblique Projection

ZHEN Hai-lan

(Chongqing University C, Chongqing 400030, China)

Abstract: This paper discusses several drawing problems as solution of intersection points and lines when a straight line intersects plane or conical surface, a plane intersects oblique pyramid and cylinder and the axial line of normal cylinder has skew intersection with the axial line of cylinder.

Keywords: oblique projection; projection ray; intersection points; intersection line